

624.04  
м-98

Müller-Breslau,

профессоръ политехникума въ Берлинъ.

Выпускъ VII.

# Трафическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

Т. Т. Кривошеинъ,

Военный инженеръ, преподаватель Николаев-  
ской Инженерной Академіи и Училища.

Л. Н. Казинъ,

Военный инженеръ.

Томъ II.

СОДЕРЖАНІЕ выпуска VII:

1. Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе къ  
изслѣдованію статически неопредѣлимыхъ и статически опре-  
дѣлимыхъ фермъ (продолженіе).

§ 3. Линія прогибовъ, рассматриваемая какъ веревочный многоугольникъ.

§ 4. Линія вліянія и числа вліянія для упругихъ перемѣщеній.

§ 5. Примѣненіе теоріи деформаций къ расчету статически опредѣлимой рѣ-  
шетки.

Изданіе инженера Л. Н. Казина.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ, Малая Морская, № 9.

1899.



2189



П

У

624.09  
m-98

Müller-Breslau,  
профессоръ политехникума въ Берлинъ.

Выпускъ VII.

# Трафическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

Т. Т. Кривошеинъ,

Военный инженеръ, преподаватель Николаев-  
ской Инженерной Академіи и Училища.

П. Н. Казинъ,

Военный инженеръ.

Томъ II.

СОДЕРЖАНІЕ выпуска VII:

1. Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе къ изслѣдованію статически неопредѣлимыхъ и статически опредѣлимыхъ фермъ (продолженіе).
  - § 3. Линія прогибовъ, разсматриваемая какъ веревочный многоугольникъ.
  - § 4. Линіи вліянія и числа вліянія для упругихъ перемѣщеній.
  - § 5. Примѣненіе теоріи деформаций къ расчету статически опредѣлимой рѣшетки.

Изданіе инженера П. Н. Казина.

проверено  
1899 г.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ, Малая Морская, № 9.  
1899.

Дозволено цензурою, С.-Петербургъ, 3 Августа 1899 года.



# ОГЛАВЛЕНІЕ

## ВЫПУСКА VII.

### ОТДѢЛЪ I.

Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе  
къ изслѣдованію статически неопредѣлимыхъ и статически  
опредѣлимыхъ рѣшетокъ (продолженіе).

	СТР.
§ 3. Линія прогибовъ, разсматриваемая какъ веревочный многоугольникъ .	5
§ 4. Линіи вліянія и числа вліянія для упругихъ перемѣщеній . . . . .	43
§ 5. Статически неопредѣлимая рѣшетка . . . . .	46
§ 6. Примѣненіе теоріи деформаций къ расчету статически опредѣлимой рѣшетки. . . . .	96









## ОТДѢЛЪ I.

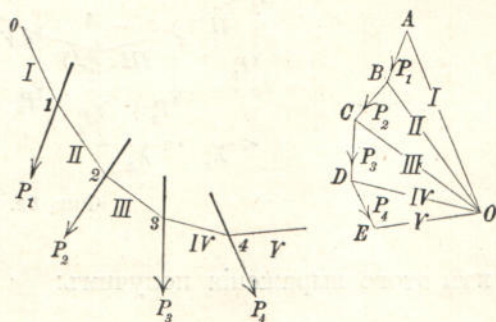
# Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе къ изслѣдо- ванію статически неопредѣлимыхъ и статически опредѣлимыхъ фермъ.

(ПРОДОЛЖЕНІЕ).

### § 3.

Линія прогибовъ, рассматриваемая какъ веревочный  
многоугольникъ.

45. Любой многоугольникъ можно рассматри-  
вать какъ веревочный многоугольникъ. Всякій много-  
угольникъ  $0-1-2-3-\dots$  (фиг. 8г) можно рассматривать какъ  
веревочный многоугольникъ  
для конечныхъ силъ  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , которыя дѣйству-  
ють въ точкахъ 1, 2, 3,  $\dots$   
и направленія которыхъ мо-  
гутъ быть выбраны въ из-  
вѣстныхъ предѣлахъ произ-  
вольными. Отношенія между  
величинами этихъ силъ опре-  
дѣляются сторонами втораго  
многоугольника  $ABCD \dots$ ,  
углы котораго лежатъ на  
лучахъ  $I, II, III, \dots$ , про-  
веденныхъ черезъ произ-



Фиг. 8г.



вольный полюсъ  $O$  параллельно прямымъ  $0-1$ ,  $1-2$ ,  $2-3$ ,  $\dots$ , а стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $\dots$  имѣютъ направленія силъ  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $\dots$ . Тогда получимъ отношенія

$$P_1 : P_2 : P_3 : \dots = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \dots$$

Если требуется, чтобъ всѣ силы были конечныя, то ни одно направленіе силы не должно совпадать со смежной стороной многоугольника  $0-1-2-3-\dots$ , такъ напр.,  $P_2$  не должно совпадать ни съ  $II$ , ни съ  $III$ .

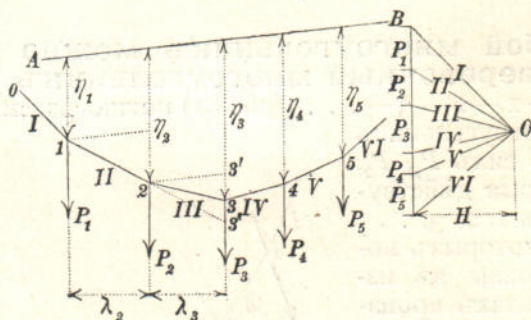
Если разсматривать многоугольникъ  $0-1-2-3-\dots$  какъ веревочный многоугольникъ для *параллельныхъ силъ* (фиг. 82), то между полюснымъ разстояніемъ  $H$ , силами  $P$  и разстояніями  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ ,  $\dots$ , измеренными по направленіямъ силъ  $P$  отъ точекъ  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $\dots$  до произвольной прямой  $AB$ , будетъ существовать простая зависимость, позволяющая выразить  $P$  въ функціи отъ  $\eta$ . Если провести черезъ точку  $2$  прямую, параллельную къ  $AB$ , которая встрѣтитъ направленіе силы  $P_3$  въ точкѣ  $3'$ , и если затѣмъ продолжить  $1-2$  до точки  $3''$ , то получимъ:

$$\overline{3''-3'} = (\eta_2 - \eta_1) \frac{\lambda_3}{\lambda_2}; \quad \overline{3-3'} = \eta_3 - \eta_2, \quad \text{откуда:}$$

$$\overline{3''-3} = \overline{3''-3'} - \overline{3-3'} = (\eta_2 - \eta_1) \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - (\eta_3 - \eta_2),$$

гдѣ  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  означаютъ проекціи сторонъ  $1-2$  и  $2-3$  на прямую, перпендикулярную къ направленію  $P$ . Затѣмъ найдемъ:

$$\overline{3''-3} : \lambda_3 \parallel P_2 : H, \quad \text{а отсюда: } \overline{3''-3} = P_2 \frac{\lambda_3}{H};$$



Фиг. 82.

а изъ этого выраженія получимъ:

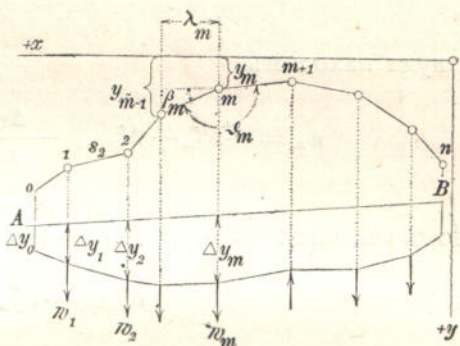
$$P_2 = H \left[ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} \right] \text{ и}$$

вообще

$$(1) \quad P_m = H \left[ \frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}} \right].$$

**46. Линія прогибовъ.** При помощи только что сдѣланныхъ разсужденій линію прогибовъ какого-нибудь шарнирнаго многоугольника  $0-1-2-\dots-m-\dots$  (фиг. 83) можно разсматривать какъ веревочный многоугольникъ, построенный для параллельныхъ силъ.

Отнесемъ шарнирный многоугольникъ, лежащій въ вертикальной плоскости, къ прямоугольнымъ осямъ координатъ  $x, y$ , выборъ которыхъ ограничимъ однимъ условиемъ, а именно чтобы ни одинъ уголъ наклоненія  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$  стержней  $s_1, s_2, s_3 \dots$  къ оси  $x$  не равнялся  $90^\circ$ . Затѣмъ предположимъ, что перемѣшеніе каждаго узла будетъ разложено на два составляющихъ перемѣшенія  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , параллельныхъ двумъ осямъ  $x$  и  $y$  (эти перемѣшенія представляютъ измѣненія координатъ  $x$  и  $y$ ); отложимъ всѣ  $\Delta y$  отъ произвольной прямой  $AB$  по прямымъ, проходящимъ черезъ соответствующіе узлы и параллельнымъ оси  $-y$ . Ломанная линія, соединяющая конечныя точки ординатъ  $\Delta y$ , называется *линіей прогибовъ*; площадь же, ограниченная этой линіей, прямой  $AB$  и ординатами  $\Delta y_0$  и  $\Delta y_n$ , называется *площадью прогибовъ въ направленіи оси  $-y$* . Силы, параллельныя оси  $-y$ , для которыхъ веревочнымъ многоугольникомъ будетъ данная линія прогибовъ, обозначимъ буквами  $w_1, w_2, \dots, w_m, \dots$ ; если выбрать полюсное разстояніе  $= 1$ , то эти силы опредѣлятся изъ слѣдующаго выраженія:



Фиг. 83.

$$(2) \quad w_m = \frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}}.$$

Продифференцируемъ теперь уравненіе

$$y_{m-1} - y_m = s_m \sin \beta_m$$

и замѣнимъ знакъ дифференціала знакомъ  $\Delta$  (въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ величинами весьма малыми), тогда получимъ:

$$\Delta y_{m-1} - \Delta y_m = \Delta s_m \sin \beta_m + s_m \cos \beta_m \Delta \beta_m,$$



а по раздѣленіи на  $\lambda_m = s_m \cos \beta_m$ , найдемъ:

$$\frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} = -\frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \Delta \beta_m.$$

Точно также получимъ:

$$\frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} = -\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} - \Delta \beta_{m+1},$$

откуда находимъ:

$$w_m = -\Delta \beta_m + \Delta \beta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Но такъ какъ:

$$\beta_{m+1} + 180^\circ - \beta_m = \vartheta_m$$

и

$$\Delta \beta_{m+1} - \Delta \beta_m = \Delta \vartheta_m,$$

то найдемъ окончательно:

$$(3) \quad w_m = \Delta \vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

При  $\beta_m = 90^\circ$  или при  $\beta_{m+1} = 90^\circ$  величины  $w_m$  получатся безконечно большими, вотъ почему мы въ началѣ изслѣдованія для выбора координатныхъ осей сдѣлали ограниченіе.

Если начальная температура всѣхъ стержней не мѣняется, т. е. для каждаго стержня можно составить равенство:  $\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{EF} = \frac{\sigma}{E}$ , и если всѣ стержни имѣютъ одинъ и тотъ же коэффициентъ упругости  $E$ , то линію прогибовъ будетъ очень удобно разсматривать какъ веревочный многоугольникъ, построенный для силъ:

$$(4) \quad w_m = E \Delta \vartheta_m - \sigma_m \operatorname{tg} \beta_m + \sigma_{m+1} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Если за полюсное разстояніе принять величину  $E$ , то величины  $\Delta y$  получатся въ томъ же масштабѣ, въ какомъ вычерченъ шарнирный многоугольникъ. Желая получить величины  $\Delta y$  въ  $\nu$ -разъ большемъ масштабѣ, то за полюсное разстояніе надо принять величину  $= \frac{E}{\nu}$ . Этотъ способъ, при одинаковомъ для всѣхъ стержней  $E$ , можно рекомендовать также тогда, когда требуется принять во вниманіе измѣненія температуры; въ этомъ случаѣ, придется только увеличить напряженія  $\sigma = \frac{S}{F}$  на  $\varepsilon Et$  (см. конецъ № 40, выпускъ VI).

Послѣ построения веревочнаго многоугольника всѣ величины  $\Delta y$  будутъ уже извѣстны, необходимо только задать положеніе замыкающей линіи  $AB$ , или, напр., два какихъ нибудь перемѣщенія  $\Delta y$ .

**Численный примѣръ** (листъ чертежей 2 bis). Опредѣлимъ вертикальныя перемѣщенія узловъ верхняго пояса рыбовидной фермы, фиг. 84. Нагрузка была дана на фиг. 66, а діаграмма напряженій на фиг. 67 \*). Длина стержней  $s$  и площади поперечныхъ сѣченій  $F$  даны на фиг. 68, усилія  $S$  и напряжения  $\sigma$  — на фиг. 69 (см. листъ чертежей 2, выпускъ VI). Красныя числа на фиг. 84 даютъ величины значеній  $E\Delta z$  (клгр. на см.<sup>2</sup>) тѣхъ угловъ треугольниковъ, изъ которыхъ образуются углы  $\vartheta_2, \vartheta_4, \dots$ . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} E\Delta\vartheta_2 &= +1719 + 1373 + 243 = 3335 \text{ к./см.}^2; & E\Delta\vartheta_4 &= 298 + 713 + 25 = 1036; \\ E\Delta\vartheta_6 &= 1371; & E\Delta\vartheta_8 &= 457; & E\Delta\vartheta_{10} &= 1246; & E\Delta\vartheta_{12} &= 581; & E\Delta\vartheta_{14} &= 1025; \\ E\Delta\vartheta_{16} &= 1150; & E\Delta\vartheta_{18} &= 3856. \end{aligned}$$

Такъ какъ углы наклоненія всѣхъ стержней верхняго пояса къ горизонту равны нулю, то изъ уравненія (4) получимъ:

$$w_m = E\Delta\vartheta_m.$$

Грузы  $w_m$  отложены въ масштабѣ: 1000 к./см.<sup>2</sup> = 5 мм. Линейный масштаб для фермы выбранъ = 1:300, а для перемѣщеній въ 600 разъ больше (а именно 2:1), поэтому для полюснаго разстоянія выбрана величина  $\frac{E}{600} = \frac{1\ 800\ 000}{600} = 3\ 000 \text{ к./см.}^2 = 15 \text{ мм.}$  Послѣ построения веревочнаго многоугольника проводимъ замыкающую линію  $AB$ , пользуясь тѣмъ условіемъ, что вертикальныя перемѣщенія узловъ  $o$  и  $20$  равны нулю. Величины прогибовъ вписаны на фигурѣ.

Горизонтальныя перемѣщенія узловъ 2, 4, ... верхняго пояса опредѣлятся въ данномъ примѣрѣ весьма быстро. Такъ напр., узелъ 8 получаетъ перемѣщеніе влѣво, которое равно суммѣ укороченій (они записаны на фиг. 84) стержней 0—2, 2—4, 4—6, 6—8, т. е. = 1,09 + 1,12 + 1,16 + 1,17 = 4,54 мм. Для узла 18 получимъ горизонтальное перемѣщеніе: 10,32 мм. Весь способъ очень нагляденъ и результаты его исполнѣ точны \*\*).

Мы рекомендуемъ читателю въ видѣ упражненія построить линію прогибовъ *нижняго пояса* той же фермы. Для этого надо сначала вычислить значенія  $\sigma \operatorname{tg} \beta$ , соотвѣтствующія отдѣльнымъ стержнямъ, причемъ необходимо строго *следить за знакомъ*. Для стержней 0—1 до 7—9  $\beta$  будетъ отрицательно, для 11—13 до 19—20 — положительно (ср. также фигуру 83 на предыдущей страницѣ). Принимая во вниманіе высоты, данныя на фиг. 68 (листъ черт. 2, выпускъ VI), получимъ:

$$\text{для стержня } 0-1: \sigma \operatorname{tg} \beta = -478 \frac{1,268}{2,4} = -253,$$

$$\text{„ „ } 1-3: \sigma \operatorname{tg} \beta = -492 \frac{2,546 - 1,268}{3,0} = -210,$$

и для слѣдующихъ стержней, по порядку:

$$\sigma \operatorname{tg} \beta = -151; -98; -47; 0; +47; +98; +151; +219; +264.$$

Величины  $E\Delta\vartheta$  для узловъ 1, 3, 5, ... 19 будутъ равняться:

$$3096; 1400; 1159; 869; 850; 904; 679; 988; 1522; 3446;$$

\*) См. № 41 (выпускъ VI), гдѣ мы изслѣдовали деформации нижняго пояса разсматриваемой фермы.

\*\*) Способъ этотъ предложенъ проф. Müller-Breslau въ 1888 г.

Примѣчаніе переводчиковъ.



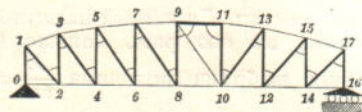
а для грузовъ  $w_m$  получимъ по уравненію (3) слѣдующія значенія (въ клгр. на см.<sup>2</sup>)

$$\begin{array}{l|l} w_1 = 3096 + 253 - 210 = 3139 & w_{11} = 904 - 0 + 47 = 951 \\ w_3 = 1400 + 210 - 151 = 1459 & w_{13} = 679 - 47 + 98 = 730 \\ w_5 = 1159 + 151 - 98 = 1212 & w_{15} = 988 - 98 + 151 = 1041 \\ w_7 = 869 + 98 - 47 = 920 & w_{17} = 1522 - 151 + 219 = 1590 \\ w_9 = 850 + 47 + 0 = 897 & w_{19} = 3446 - 219 + 264 = 3491. \end{array}$$

Полюсное разстояніе, какъ и раньше, взято  $= 3000$  к./см.<sup>2</sup>; тогда вертикальныя перемѣщенія получатся въ масштабѣ 2:1.

Если требуется построить вертикальныя перемѣщенія *всѣхъ* узловъ фермы съ помощью *одного* веревочнаго многоугольника, то придется рассмотреть шарнирный многоугольникъ, вычерченный жирными линиями (фиг. 77, выпускъ VI). Но этотъ послѣдній способъ годится только въ томъ случаѣ, когда (какъ въ данномъ примѣрѣ) всѣ промежуточные стержни имѣютъ наклонное положеніе.

Если же требуется построить вертикальныя перемѣщенія узловъ *обоихъ* поясовъ фермы, приведенной на фиг. 85, при помощи *одного* веревочнаго многоугольника, то придется изслѣдовать шарнирный многоугольникъ 0—1—2—3—4—5—...—9—11—10—13—...—16; но тогда получимъ безконечно



Фиг. 85.

большія значенія для  $w$ -силъ, такъ какъ вертикальныя стойки даютъ уголъ  $\beta = 90^\circ$ . Но, если построить сначала линію прогибовъ для одного изъ поясовъ этой рѣшетки, то вторая линія для другаго пояса легко опредѣлится при помощи условія, что вертикальныя перемѣщенія соответствующихъ узловъ (напр. 1 и 0, 3 и 2, и т. д.) отличаются между собой на величину измѣненія длины стержня, связующаго эти узлы. Такимъ

образомъ, если узелъ 4 понизится на  $\delta_4$ , а стержень 5—4 укоротится на  $\Delta s$ , то  $\delta_5 = \delta_4 + \Delta s$ .

**47.** — Покажемъ еще другой способъ вычисленія величинъ  $w$  для *простой рѣшетки*, причемъ безразлично, будетъ-ли это простая балка, ферма Гербера, трехшарнирная арка или какая либо другая ферма. Разсмотримъ три случая.

**I случай.** Всѣ стержни образуютъ съ осью  $x$  уголъ меньше или больше  $90^\circ$ . Требуется найти перемѣщенія  $\Delta y$  узловъ *обоихъ* поясовъ.

Будемъ обозначать, см. фиг. 86, буквами:

$o_m$  — длину стержня верхняго пояса, лежащаго противъ узла  $m$  нижняго пояса,

$u_k$  — длину стержня нижняго пояса, лежащаго противъ узла  $k$  верхняго пояса.

$d_m$  — длину раскоса  $(m-1) - m$ ,

$\lambda_m$  — проекцію  $d_m$  на ось  $x$ ,

$\beta_m$  — уголъ наклоненія  $o_m$  къ оси  $x$ ,

$\gamma_k$  — " " " " " "

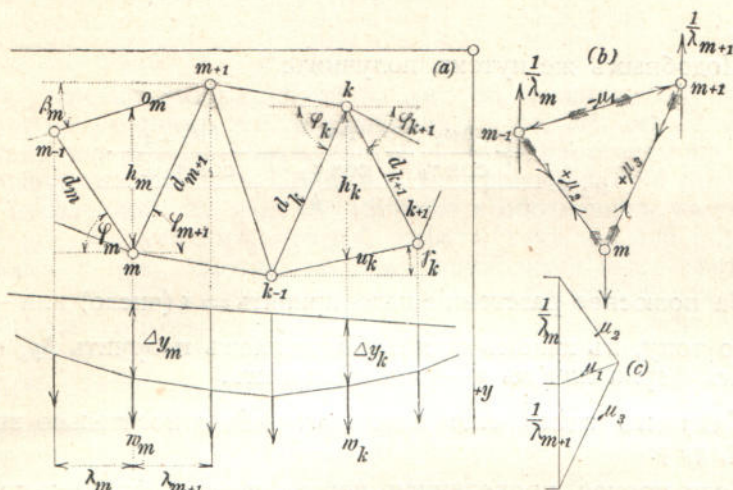
$\varphi_m$  — " " " " " "

Вообразимъ, что треугольникъ  $(m-1) - m - (m+1)$  находится въ точкахъ  $(m-1)$  и  $(m+1)$  подѣйствіемъ силъ  $\frac{1}{\lambda_m}$  и

$\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ , теченіе которыхъ совпадаетъ съ направленіемъ  $(-y)$ , фиг. 86 б, причемъ треугольникъ опирается въ точкѣ  $m$ ; къ этому со-



стоянію нагрузки и къ дѣйствительному состоянію перемѣщений примѣнимъ уравненіе работы, выведенное въ № 7 (выпускъ VI):  $\Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{S} \Delta s$ . Такъ какъ точка  $(m-1)$  относительно  $m$  перемѣстится по направленію  $(+y)$  на величину  $\Delta y_{m-1} - \Delta y_m$ , а точка  $(m+1)$  относительно  $m$  на величину  $\Delta y_{m+1} - \Delta y_m$ , то возможная



Фиг. 86.

работа внѣшнихъ силъ (принимая во вниманіе уравн. (2), стр. 7) будетъ равняться:

$$\Sigma \bar{Q} \delta = -\frac{I}{\lambda_m} (\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) - \frac{I}{\lambda_{m+1}} (\Delta y_{m+1} - \Delta y_m) = w_m.$$

Пусть абсолютныя величины напряженій, вызываемыхъ въ трехъ стержняхъ  $o_m$ ,  $d_m$ ,  $d_{m+1}$  воображаемымъ состояніемъ нагрузки, будутъ равны:  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ; онѣ опредѣлены на фиг. 86 с; затѣмъ получимъ:

$$5) \quad w_m = \Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{S} \Delta s = -\mu_1 \Delta o_m + \mu_2 \Delta d_m + \mu_3 \Delta d_{m+1}.$$

Первый членъ отрицателенъ, такъ какъ стержень  $o_m$  сжать усиліемъ  $\mu_1$ .

Обозначимъ буквою  $h_m$  высоту рѣшетки въ точкѣ  $m$  по направленію, параллельному оси  $-y$ , тогда найдемъ:

$$\mu_1 : \frac{I}{\lambda_m} = \frac{\lambda_m}{\cos \beta_m} : h_m, \text{ а отсюда } \mu_1 = \frac{I}{h_m \cos \beta_m}.$$

$$\mu_2 : \frac{I}{\lambda_m} = d_m : h_m = \frac{\lambda_m}{\cos \varphi_m} : h_m \quad \text{,,} \quad \mu_2 = \frac{I}{h_m \cos \varphi_m},$$

и точно также:

$$\mu_3 = \frac{I}{h_m \cos \varphi_{m+1}},$$



почему прежнее выражение для  $w_m$  перейдет въ слѣдующее:

$$(6) \quad w_m = \frac{-\frac{\Delta o_m}{\cos \beta_m} + \frac{\Delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}}}{h_m}$$

Подобнымъ же путемъ получимъ:

$$(7) \quad w_k = \frac{+\frac{\Delta u_k}{\cos \gamma_k} - \frac{\Delta d_k}{\cos \varphi_k} - \frac{\Delta d_{k+1}}{\cos \varphi_{k+1}}}{h_k}$$

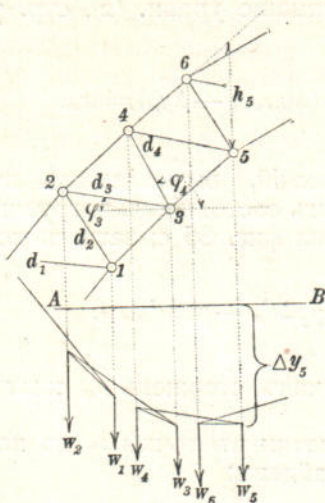
За полюсное разстояніе надо принять  $= 1$  (число) или  $\frac{1}{v}$ , смотря, по тому, въ какомъ масштабѣ желаемъ получить  $\Delta y$ , въ томъ же какъ ферма или въ  $v$ —разъ больше.

Сдѣлаемъ здѣсь еще одно замѣчаніе относительно знака угловъ  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ .

Если прямая, проведенная черезъ узелъ  $r$  параллельно оси— $y$ , пройдетъ между узлами  $(r-1)$  и  $(r+1)$ , гдѣ  $r$  означаетъ номеръ узла, то достаточно будетъ установить, что подъ  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$  надо понимать *острые* углы наклоненія стержней къ оси— $x$ . Будетъ ли положительнымъ угломъ выбранъ уголъ кверху или книзу, безразлично, потому что выраженія для  $w_m$  и  $w_k$  содержатъ только косинусы угловъ, а  $\cos(-\alpha) = \cos(+\alpha)$ . Другое дѣло, если имѣемъ случай, показанный на фиг. 87, что часто бываетъ въ арочныхъ фермахъ. Если здѣсь  $r$  означаетъ номеръ узла *нижняго* пояса, то  $\cos \varphi_r$  будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, лежитъ  $r-1$  лѣвѣе или правѣе  $r$ ; а  $\cos \varphi_{r+1}$  — положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, находится  $r+1$  правѣе или лѣвѣе  $r$ . Надо также наблюдать, чтобъ силы  $w$  складывались при построеніи веревочнаго многоугольника въ такомъ порядкѣ . . .  $w_{r-1}$ ,  $w_r$ ,  $w_{r+1}$ , и чтобъ  $h_r$  измѣнялось въ направленіи  $y$  отъ узла  $r$  до продолженія стержня  $(r-1) - (r+1)$ .

Ради сокращенія введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\Delta' o = \frac{\Delta o}{\cos \beta}, \quad \Delta' u = \frac{\Delta u}{\cos \gamma}, \quad \Delta' d = \frac{\Delta d}{\cos \varphi},$$



Фиг. 87.

тогда напишемъ:

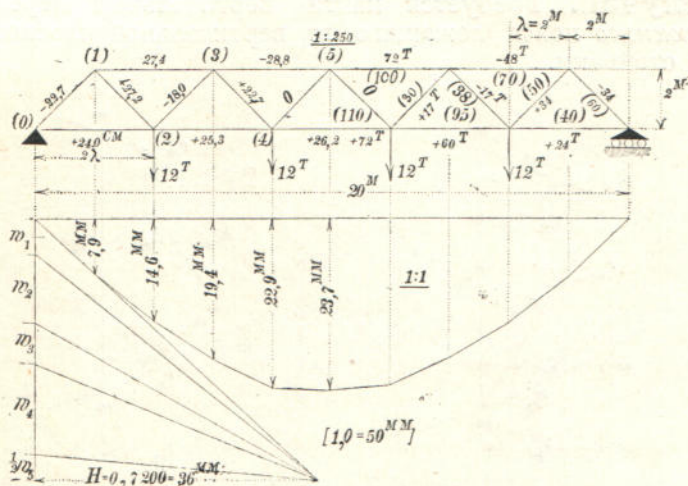
$$(8) \quad w_m = \frac{-\Delta' o_m + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1}}{h_m}$$

$$(9) \quad w_k = \frac{-\Delta' u_k - \Delta' d_k - \Delta' d_{k+1}}{h_k}$$

Для рѣшетки, изображенной на фиг. 86, величины  $\Delta' o$ ,  $\Delta' u$ ,  $\Delta' d$  имѣютъ тотъ же знакъ, что и удлиненія  $\Delta o$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta d$ ; онѣ будутъ положительны или отрицательны, смотря по тому, растянуты или сжаты соответствующіе стержни. Примѣняя же уравненія (8) и (9) къ рѣшеткѣ, показанной на фиг. 87 (буквою  $r$  обозначимъ узелъ нижняго пояса), мы увидимъ, что  $\Delta' d_r$  имѣетъ тотъ же или обратный знакъ какъ и  $\Delta' d_r$ , смотря по тому, приходится  $r-1$  лѣвѣе или правѣе  $r$ , и что  $\Delta' d_{r+1}$  имѣетъ тотъ же или обратный знакъ какъ и  $\Delta' d_{r+1}$ , смотря по тому, приходится  $r+1$  правѣе или лѣвѣе  $r$ .

Величины  $\Delta' o$ ,  $\Delta' u$ ,  $\Delta' d$  надо опредѣлить графически, причемъ сѣтъ фермы требуется вычертить въ большомъ масштабѣ.

**Численный примѣръ.** Опредѣлимъ вертикальныя перемѣщенія всѣхъ узловъ рѣшетки изъ сварочнаго желѣза, фиг. 88; примемъ, что въ каждомъ узлѣ нижняго пояса приложенъ грузъ 12 т. и что величина  $E$  для всей



Фиг. 88.

рѣшетки одинакова и равна 1 800 000 к./см.<sup>2</sup> \*). Ферма симметрична относительно середины, поэтому достаточно изслѣдовать только одну половину.

На правой половинѣ фермы вписаны усилія въ тоннахъ и поперечныя сѣченія въ см.<sup>2</sup> (цифры въ скобкахъ); на лѣвой половинѣ записаны удлиненія (въ см.) увеличенныя въ 180 разъ и раздѣленныя на косинусы угловъ на-

\*) Проф. Müller-Breslau на своихъ лекціяхъ въ 1897 г. совѣтовалъ брать  $E = 1\ 600\ 000$  к./см.<sup>2</sup>.



клонения стержней. Для стержня горизонтальнаго пояса имѣемъ  $\Delta'o = \Delta o$  и соответственно  $\Delta'u = \Delta u$ ; напр., для стержня 1—3:

$$180 \Delta'o = \frac{Oo}{\left(\frac{1}{180} E\right) F} = \frac{48\,000 \times 400 \text{ см.}}{10\,000 \cdot 70} = 27,4 \text{ см.}$$

Для раскоса получимъ (причемъ  $d = \frac{\lambda}{\cos 45^\circ} = \lambda \sqrt{2}$ ):

$$180 \Delta'd = 180 \Delta d \frac{d}{\lambda} = \frac{D d^2}{\left(\frac{1}{180} E\right) F \lambda} = \frac{2 D \lambda}{10\,000 F},$$

напр., для раскоса 1—2:

$$180 \Delta'd = \frac{2 \cdot 34\,000 \times 200}{10\,000 \cdot 50} = 27,2 \text{ см.}$$

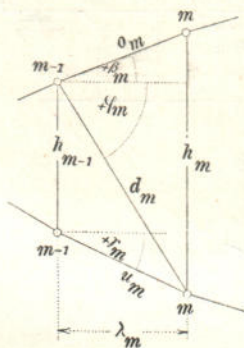
Изъ уравнений (8) и (9) получимъ теперь:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{200} [ + 24,0 + 22,7 - 27,5 ] = 0,0975 \\ w_2 &= \frac{1}{200} [ + 27,4 + 27,2 - 18,0 ] = 0,1830 \\ w_3 &= \frac{1}{200} [ + 25,3 + 18,0 - 22,7 ] = 0,1030 \end{aligned}$$

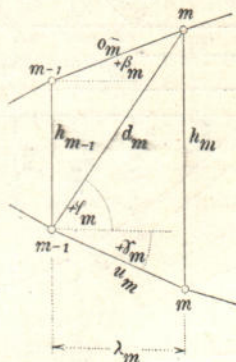
$$\begin{aligned} w_4 &= \frac{1}{200} [ + 28,8 + 22,7 ] = 0,2575 \\ w_5 &= \frac{1}{200} 26,2 = 0,1310. \end{aligned}$$

Величины  $w$  и полюсное разстояніе  $H$  суть числа. Если возьмемъ  $H = 1$ , то веревочный многоугольникъ дастъ въ 180 разъ большіе прогибы въ масштабѣ фермы (т. е. въ масштабѣ 1:250). На фиг. 88 прогибъ начерченъ въ масштабѣ 1:1, поэтому полюсное разстояніе было взято  $H = \frac{180}{250} = 0,72$ . Масштабъ для чиселъ  $w$  взять: 1 = 50 мм.

**II случай.** Требуется найти вертикальныя перемѣщенія узловъ *нижняго* пояса (лежащаго въ вертикальной плоскости) рѣшетки со стойками.



Фиг. 89.



Фиг. 90.

Обозначимъ буквами (фиг. 89 и 90):

$o_m$	— длину стержня верхняго пояса	} въ $m$ -ой панели
$u_m$	— " " нижняго " "	
$d_m$	— " " раскоса " "	
$h_m$	— " стойки $mm$	
$\beta_m$	— уголъ наклоненія $o_m$ къ горизонту	
$\gamma_m$	— " " $u_m$ " " "	
$\varphi_m$	— " " $d_m$ " " "	
$\lambda_m$	— длину панели.	

Введемъ по прежнему сокращенія (см. стр. 12):

$$\Delta'o = \frac{\Delta o}{\cos \beta}; \quad \Delta'u = \frac{\Delta u}{\cos \gamma}; \quad \Delta'd = \frac{\Delta d}{\cos \varphi}$$

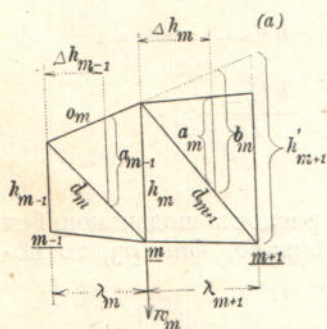
и замѣтимъ, что въ данномъ случаѣ  $\Delta'o$ ,  $\Delta'u$ ,  $\Delta'd$  имѣютъ всегда тотъ же знакъ, что и  $\Delta o$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta d$ .

Сначала рассмотримъ распределеніе раскосовъ, какъ показано на фиг. 91 (влѣво поднимающіеся раскосы по обѣ стороны стойки  $mm$ ). Диаграмма напряженій для воображаемаго состоянія нагрузки, показанной на фиг. 91 б, доставитъ слѣдующія напряжения  $\mu$  для поясовъ  $o_m$ ,  $u_{m+1}$  и для раскосовъ  $d_m$ ,  $d_{m+1}$  (безъ знака):

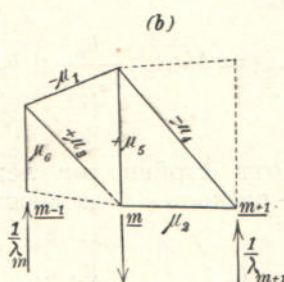
$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{I}{h_m \cos \beta_m}; & \mu_2 &= \frac{I}{h_m \cos \gamma_{m+1}}; \\ \mu_3 &= \frac{I}{h_m \cos \varphi_m}; & \mu_4 &= \frac{I^{**})}{h_m \cos \varphi_{m+1}}. \end{aligned}$$

Для напряжения  $\mu_5$  въ стойкѣ  $mm$  имѣемъ:

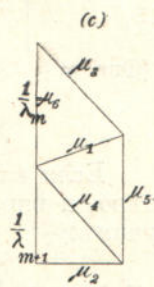
$$\mu_5 : \frac{I}{\lambda_{m+1}} = h'_{m+1} : h_m, \text{ откуда } \mu_5 = \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1} h_m}.$$



Фиг. 91 а.



Фиг. 91 б.



Фиг. 91 с.

гдѣ  $h'_{m+1}$  означаетъ разстояніе нижняго узла  $m+1$  отъ точки пересѣченія  $(m+1)^{oa}$  стойки съ продолженіемъ стержня  $o_m$ . Для  $(m-1)^{oa}$  стойки имѣемъ:  $\mu_6 = \frac{I}{\lambda_m}$ . На фиг. 91 б стержни, вычерченныя пунктиромъ, не напряжены.

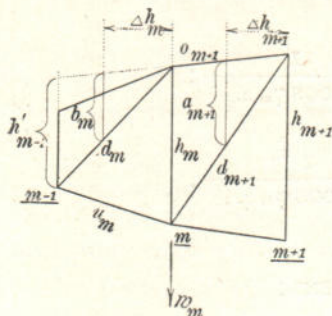
\*) См. стр. 11.



Принимая теперь во вниманіе знакъ напряженій  $\mu$  (фиг. 91 b), получимъ (по ур. 5, стр. 11):

$$w_m = -\mu_1 \Delta o_m + \mu_2 \Delta u_{m+1} + \mu_3 \Delta d_m - \mu_4 \Delta d_{m+1} + \mu_5 \Delta h_m - \mu_6 \Delta h_{m-1}, \text{ т. е.}$$

$$(10) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - a_{m-1} + b_m], \\ \text{[Фиг. 91.]} \quad \text{гдѣ } a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m} \text{ и } b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$



Фиг. 92.

Величины  $a_{m-1}$ ,  $b_m$  (которые имѣютъ одинаковые знаки съ величинами  $\Delta h_{m-1}$  и соотв.  $\Delta h_m$ ) опредѣляются проще всего графически, какъ показано на фиг. 91 а; точно также бываетъ часто проще производить графически дѣленіе удлиненій на косинусы, складывая члены въ скобкахъ при помощи циркуля. *Необходимо только обращать вниманіе на знаки!*

Разсматривая зеркальное изображеніе фиг. 91, получимъ распределеніе раскосовъ, показанное на фиг. 92 (надо обратить здѣсь вниманіе на величину  $h'_{m-1}$ ), причемъ для этой рѣшетки будемъ имѣть:

$$(11) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - a_{m+1} + b_m], \\ \text{[Фиг. 92.]} \quad \text{гдѣ } a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \text{ и } b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}. \end{cases}$$

Если влѣво отъ стойки  $mm$  лежитъ раскосъ, поднимающійся влѣво, а вправо — раскосъ, поднимающійся вправо, фиг. 93, то получимъ:

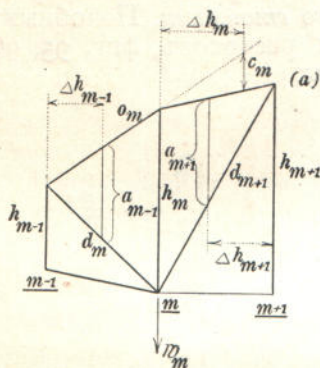
$$w_m = -\mu_1 \Delta o_m - \mu_2 \Delta o_{m+1} + \mu_3 \Delta d_m + \mu_4 \Delta d_{m+1} + \mu_5 \Delta h_m - \mu_6 \Delta h_{m-1} - \mu_7 \Delta h_{m+1},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{h_m \cos \beta_m}; \quad \mu_2 = \frac{1}{h_m \cos \beta_{m+1}}; \quad \mu_3 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m};$$

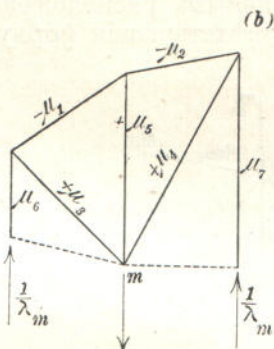
$$\mu_4 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}}; \quad \mu_5 = \mu_1 \sin \beta_m - \mu_2 \sin \beta_{m+1} =$$

$$\frac{1}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}); \quad \mu_6 = \frac{1}{\lambda_m}; \quad \mu_7 = \frac{1}{\lambda_{m+1}}, \text{ и затѣмъ:}$$

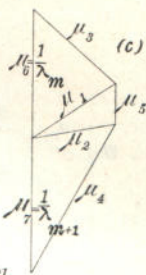
$$\begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + c_m - a_{m-1} - a_{m+1}], \\ \text{гдѣ } c_m = h_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}); \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m}; \\ \text{[Фиг. 93.]} \quad a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$



Фиг. 93 а.

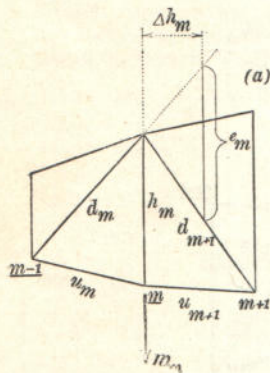


Фиг. 93 б.

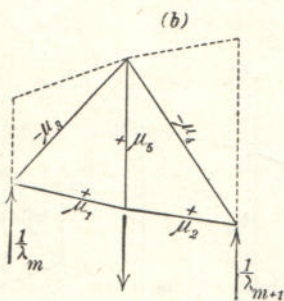


Фиг. 93 с.

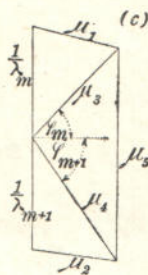
Если величина  $c_m$ , построенная на фиг. 93 а, лежитъ ниже продолженія  $o_m$  (т. е.  $\beta_{m+1} > \beta_m$ ), то  $c_m$  имѣетъ знакъ, обратный знаку  $\Delta h_m$ .



Фиг. 94 а.



Фиг. 94 б.



Фиг. 94 с.

Для расположенія раскосовъ на фиг. 94 напряженіе въ  $m$  ой стойкѣ будетъ равняться:

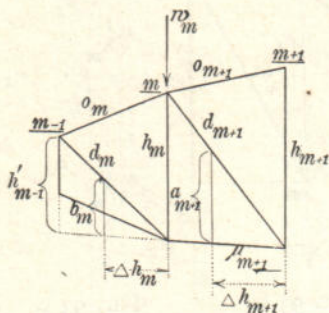
$$\begin{aligned} p_5 &= p_3 \sin \varphi_m + p_4 \sin \varphi_{m+1} = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m} \sin \varphi_m + \frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}} \sin \varphi_{m+1} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{h_m}, \end{aligned}$$



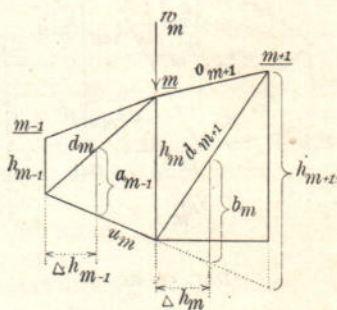
поэтому можемъ написать:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_m = \frac{1}{h_m} [ + \Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} + e_m ], \\ \text{[Фиг. 94.]} \quad \text{гдѣ } e_m = \Delta h_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}). \end{array} \right.$$

**III случай.** Требуется опредѣлить вертикальныя перемѣшенія узловъ *верхняго* пояса *рышетки со стойками*. Подобнымъ же путемъ для различныхъ расположеній раскосовъ, фиг. 95, 96, 97, 98, получимъ соотвѣтствующія формулы:

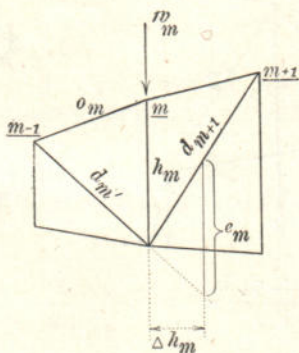


Фиг. 95

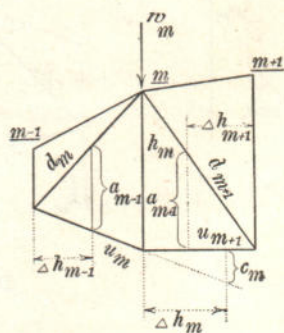


Фиг. 96.

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_m = \frac{1}{h_m} [ - \Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - b_m + a_{m+1} ], \\ \text{[Фиг. 95.]} \quad \text{гдѣ } b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}; \quad a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{array} \right.$$



Фиг. 97.



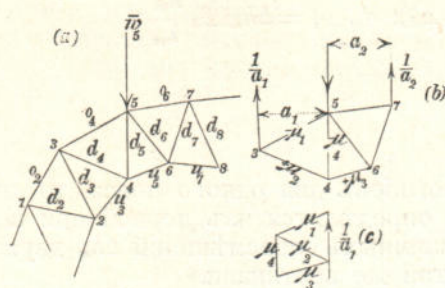
Фиг. 98.

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_m = \frac{1}{h_m} [ - \Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + a_{m-1} - b_m ], \\ \text{[Фиг. 96.]} \quad \text{гдѣ } b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}; \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m}. \end{array} \right.$$





$$\begin{aligned}
 w_2 &= \frac{1}{h_2} (-\Delta' o_2 + \Delta' d_2 + \Delta' d_3); & w_3 &= \frac{1}{h_3} (+\Delta' u_3 - \Delta' d_3 - \Delta' d_4); \\
 w_4 &= \frac{1}{h_4} (-\Delta' o_4 + \Delta' d_4); & w_5 &= \frac{1}{h_5} (+\Delta' u_5 - \Delta' d_6); \\
 w_6 &= \frac{1}{h_6} (-\Delta' o_6 + \Delta' d_6 + \Delta' d_7) & \text{и т. д.,}
 \end{aligned}$$



Фиг. 100.

а затѣмъ:  $\bar{w}_3 = w_2' + w_3$ ;  $\bar{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6''$ ;  $\bar{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''$ ; и т. д., причемъ надо замѣтить, что  $\Delta' d_3$  имѣетъ знакъ, противоположный знаку количества  $\Delta d_3$ , потому что узелъ 3 лежитъ влѣво отъ вертикали, проходящей черезъ 2 (см. стр. 12). Вліяніе  $\Delta d_5$  на  $\bar{w}_5$  выражается количествомъ  $-\mu_4 \Delta d_5$ , гдѣ  $\mu_4$  значеніе, определенное на фиг. 100 с при помощи диаграммы силъ. Количество  $\bar{w}_7$  не зависитъ отъ  $\Delta d_5$ , а вліяніе  $\Delta d_5$  на  $\bar{w}_3$  выражается количествомъ  $+\frac{\Delta d_5}{a_1}$ , почему и получимъ окончательно:

$$\bar{w}_3 = w_2' + w_3 + \frac{\Delta d_5}{a_1}; \quad \bar{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6'' - \mu_4 \Delta d_5; \quad \bar{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''.$$

Подобнымъ же способомъ можно опредѣлить линію прогибовъ и для нижняго пояса. Грузы  $w_m$ , соответствующіе верхнимъ узламъ, удобнѣе будетъ въ приведенныхъ частныхъ случаяхъ распределить по узламъ нижняго пояса.

2. — Напряженія  $\mu$  вызываются внѣшними параллельными силами, а потому ихъ легко опредѣлить при помощи формулъ, выведенныхъ для простыхъ рѣшетчатыхъ фермъ (см. IX отдѣлъ, выпускъ IV, томъ I). Такъ напр., напряженія въ стержняхъ  $o_m$ ,  $d_m$ ,  $d_{m+1}$  рѣшетки, фиг. 86, при дѣйствіи на нее внѣшнихъ силъ, имѣющихъ направленіе  $w$ , будутъ слѣдующія:

$$O_m = -\frac{M_m}{h_m \cos \varphi_m}; \quad D_m = \left( \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right) \frac{1}{\cos \varphi_m};$$

$$D_{m+1} = \left( \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \right) \frac{1}{\cos \varphi_{m+1}};$$

такъ какъ воображаемые грузы  $\frac{1}{h_m}$  и  $\frac{1}{h_{m+1}}$  вызываютъ моменты:  $M_{m-1} = 0$ ,  $M_m = 1$ ,  $M_{m+1} = 0$ , то для напряженій  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  получимъ слѣдующія величины:

$$\mu_1 = -\frac{1}{h_m \cos \varphi_m}; \quad \mu_2 = +\frac{1}{h_m \cos \varphi_m}; \quad \mu_3 = +\frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}}.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ сказать, что члены выраженія:

$$w_m = -\frac{\Delta o_m}{h_m \cos \varphi_m} + \frac{\Delta d_m}{h_m \cos \varphi_m} + \frac{\Delta d_{m+1}}{h_m \cos \varphi_{m+1}} = -\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m}$$

могутъ разсматриваться какъ величины тѣхъ напряженій въ стержняхъ  $o_m$ ,  $d_m$ ,  $d_{m+1}$ , которые получаются въ предположеніи, что  $M_{m-1} = 0$  и  $M_{m+1} = 0$  и что моменты  $M_m$  приписаны по порядку значенія  $\Delta o_m$ ,  $\Delta d_m$ ,  $\Delta d_{m+1}$ .

Опредѣлимъ эти напряженія при помощи способа Циммермана (§ 36, I томъ, выпускъ IV); тогда получимъ фиг. 101, гдѣ представлены величины членовъ количества  $w_m$ . На прямой, имѣющей направление  $w_2$  и проходящей черезъ узелъ 2, отложимъ отрезки:

$$\overline{2h} = \frac{\Delta o_2}{\lambda_2}; \quad \overline{2i} = \frac{\Delta d_2}{\lambda_2}; \quad \overline{2k} = \frac{\Delta d_3}{\lambda_3};$$

затѣмъ черезъ  $h, i, k$  проведемъ прямыя  $hh', ii', kk'$  параллельно стержню верхняго пояса  $o_2$ , тогда получимъ:

$$\overline{hh'} = \frac{\Delta' o_2}{h_2}; \quad \overline{ii'} = \frac{\Delta' d_2}{h_2}; \quad \overline{kk'} = \frac{\Delta' d_3}{h_2}.$$

Если вмѣсто величинъ  $\frac{\Delta o_2}{\lambda_2}, \frac{\Delta d_2}{\lambda_2}, \frac{\Delta d_3}{\lambda_3}$  отложить величины  $\Delta o_2 \frac{e}{\lambda_2}, \Delta d_2 \frac{e}{\lambda_2}, \Delta d_3 \frac{e}{\lambda_3}$  (гдѣ  $e$  означаетъ произвольный, но одинаковый для всѣхъ узловъ отрезокъ) и затѣмъ построить веревочный многоугольникъ для силъ:

$$w_m = e \left[ -\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m} \right]$$

$$w_k = e \left[ +\frac{\Delta' u_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_{k+1}}{h_k} \right] \quad (\text{см. фиг. 86}),$$

то ординаты его представлятъ перемѣненія, умноженные на  $e$ . Если разстоянія  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  одинаковы ( $=\lambda$ ) или большая часть изъ нихъ равна  $\lambda$ , то выбираемъ  $e = \lambda$ . Раздѣленія ординатъ веревочнаго многоугольника на  $e$  или  $\lambda$  можно, конечно, при соответственномъ выборѣ полюснаго разстоянія и не дѣлать.

Подобныя же изслѣдованія можно применить и къ рѣшеткѣ съ вертикалями. Такъ напр., изъ формулы, найденной для вертикали  $mt$ , фиг. 93, при нагрузкѣ, приложенной къ нижнему поясу:

$$V_m = \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1})$$

получаемъ сразу, что удлинение этой вертикали  $\Delta h_m$  имѣетъ вліяніе только на

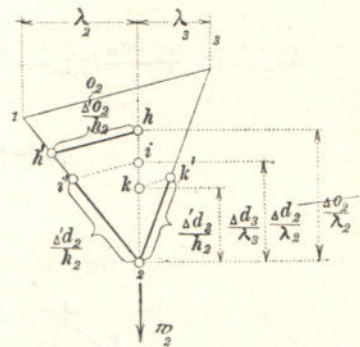
грузъ  $w_m$  и что величина этого вліянія равна  $\frac{\Delta h_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1})$ . Это количество можно представить въ видѣ напряженія, которое получается въ разсматриваемой вертикали, когда моментъ  $M_m = \Delta h_m$ .

Для вертикали  $mt$ , фиг. 95, при ѣздѣ поверху было найдено выраженіе:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{\lambda_m} \left[ 1 - \frac{\lambda_m (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1})}{h_m} \right],$$

которое легко преобразовать въ такое:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m h'_{m-1}}{\lambda_m h_m},$$



Фиг. 101.



изъ котораго видимъ, что вліяніе  $\Delta h_m$  на количество  $w_{m-1}$  равно  $\frac{\Delta h_m}{\lambda_m}$ , а влія-  
ніе на  $w_m$  равно  $\left(-\frac{\Delta h_m}{\lambda_m} \frac{h'_{m-1}}{h_m}\right)$ .

48. — Определение изменения длины хорды шарнирного многоугольника. Рассмотрим шарнирный многоугольник  $0-1-2-\dots-n$ , лежащий в вертикальной плоскости; пусть хорда его  $on$  образует с горизонтом угол  $\alpha$ . Вертикальные составляющие перемещений определим при помощи веревочного многоугольника, для которого грузы  $w_m$  вычислены по № 47 (т. е. без помощи изменения узлов). Требуется отыскать изменение  $\Delta l$  длины  $l$  хорды  $on$ . Обозначим буквами:

$\eta_m$  — длину перпендикуляра, опущенного изъ узла  $m$  на хорду  $on$ ,

$\varphi_m$  — угол между стержнем  $s_m$  и хордой  $om$ ,

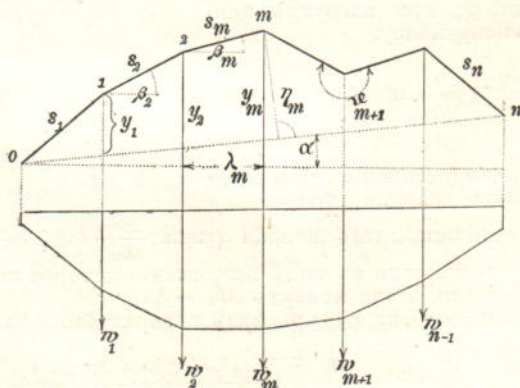
тогда по стр. 94 (выпускъ VI) имѣемъ:

$$\Delta l = \sum_{1}^{n-1} \eta_m \Delta \vartheta_m + \sum_{1}^n \Delta s_m \cos \varphi_m,$$

а это выражение надо такъ преобразовать, чтобъ  $\Delta l$  могло выразиться въ зависимости отъ величинъ  $w$ , которыми мы уже пользовались при опредѣленіи линіи прогибовъ. Для этого положимъ:

$$\Delta \vartheta_m = w_m + \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \quad (\text{по ур. (3) на стр. 8}),$$

$$\eta_m = y_m \cos \alpha, \quad \varphi_m = \beta_m - \alpha,$$



Фиг. 102.

гдѣ  $\beta_m$  — уголъ наклоненія стержня  $s_m$  къ горизонту,  
 $y_m$  — вертикальное разстояніе узла  $m$  отъ прямой  $on$ ;

тогда получимъ:

$$\Delta l = \cos \alpha \left[ \sum_1^{n-1} y_m w_m + c \right], \text{ гдѣ}$$

$$c = \sum_1^{n-1} y_m \left( \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \right) + \sum_1^n \frac{\Delta s_m \cos (\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Стержень  $s_m$  доставляетъ для количества  $c$  три члена:

$$-y_{m-1} \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m, + y_m \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m, + \frac{\Delta s_m \cos (\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha},$$

сумма которыхъ равна

$$\frac{\Delta s_m}{\cos \alpha} \left[ \operatorname{tg} \beta \sin (\beta_m - \alpha) + \cos (\beta_m - \alpha) \right] = \frac{\Delta s_m}{\cos \beta_m}$$

$$\left[ \text{такъ какъ } y_m - y_{m-1} = \lambda_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \alpha) = \frac{s_m \sin (\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha} \right];$$

такимъ образомъ получимъ  $c = \sum_1^n \frac{\Delta s_m}{\cos \beta_m} n$

$$(18) \quad \Delta l = \cos \alpha \left( \sum_1^{n-1} y_m w_m + \sum_1^n \frac{\Delta s_m}{\cos \beta_m} \right).$$

Эта формула чрезвычайно удобна, потому что количества  $w$  и  $\frac{\Delta s}{\cos \beta}$  были уже раньше опредѣлены при нахожденіи линіи прогибовъ.

Уравненіе (18) предполагаетъ, что ни одинъ изъ угловъ  $\beta$  не равенъ  $90^\circ$ . Желая выразить въ зависимости отъ количествъ  $w$  измѣненіе  $\Delta l$  длины хорды  $AB$  рѣшетки съ крайними стойками, фиг. 103, для которой уже построена линія прогибовъ *верхняго* пояса (по № 47) (весьма важная задача для дальнѣйшаго изложенія), мы должны прибавить жесткіе стержни  $OA'$ ,  $A'A$ ,  $nB'$ ,  $B'B$ .  $A'A$  и  $B'B$  имѣютъ направленіе  $AB$ , поэтому будемъ имѣть

$$\Delta l = \Delta (AB) = \Delta (A'B'),$$

такъ что эта задача сводится къ опредѣленію измѣненія длины хорды  $A'B'$  шарнирнаго многоугольника  $A'o\ 12... m... nB'$ , начальная и конечная точки котораго лежатъ на рассматриваемой хордѣ.



Получимъ:

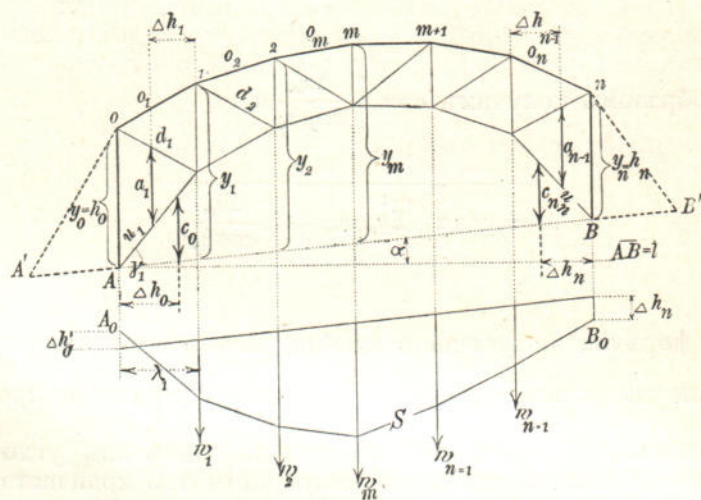
$$(19) \quad \Delta l = \sum_0^n y_m w_m + \sum_1^n \Delta' o_m,$$

$$\text{гдѣ } \Delta' o_m = \frac{\Delta o_m}{\cos \beta_m} \text{ (см. стр. 12).}$$

Для случая, приведеннаго на фиг. 103, который соответствуетъ фиг. 98, стр. 18, имѣемъ:

$$(20) \quad \begin{cases} w_0 = \frac{1}{h_0} (\Delta' u_1 - \Delta' d_1 - c_0 + a_1) \\ w_n = \frac{1}{h_n} (\Delta' u_n - \Delta' d_n - c_n + a_{n-1}), \end{cases}$$

гдѣ  $c_0 = \Delta h_0 (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha)$  ( $\gamma_1$  — принято положительнымъ вверхъ) и  $a_1 = \Delta h_1 \frac{h_0}{\lambda_1}$ ; см. фиг. 103, гдѣ  $c_0, a_1, c_n, a_{n-1}$  имѣютъ соответственно тотъ же знакъ, что и количества  $\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_n, \Delta h_{n-1}$ .



Фиг. 103.

Замѣтимъ при этомъ, что количества  $w_0$  и  $w_n$  намъ нужны только для вычисления  $\Delta l$ , но не для построения линіи прогибовъ  $A_0SB_0$ , и что замыкающая линія опредѣляется при посредствѣ измѣненій  $\Delta h_0$  и  $\Delta h_n$  длины конечныхъ стоекъ. На фиг. 103 принято  $\Delta h_0$  положительнымъ,  $\Delta h_n$  — отрицательнымъ; тогда узелъ  $O$  при неподвижныхъ точкахъ  $A$  и  $B$  получаетъ перемѣщеніе кверху, а узелъ  $n$  — книзу.

Положимъ, требуется опредѣлить вертикальныя перемѣщенія узловъ обоихъ поясовъ рѣшетки, фиг. 104, промежуточные стержни

которой, за исключеніемъ конечныхъ стоекъ, расположены наклонно; причѣмъ воспользуемся правиломъ № 47, случай I, т. е. вычислимъ  $w_1$  до  $w_{m-1}$  по уравн. (8) и (9); тогда  $\Delta l$  найдется при помощи уравненія:

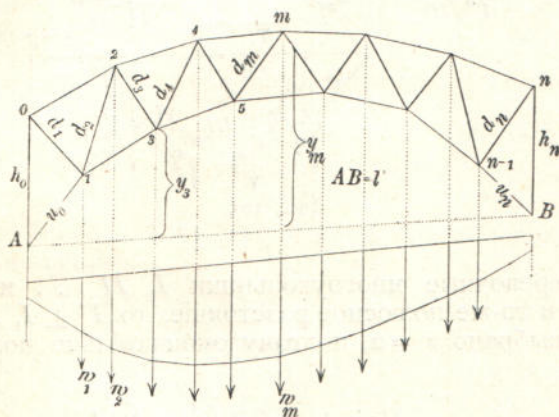
$$(21) \quad \Delta l = \sum_0^n y_m w_m + \sum_1^n \Delta' d_m,$$

гдѣ надо считать:

$$w_0 = \frac{1}{h_0} (\Delta' u_0 - \Delta' d_1 - c_0)$$

$$w_n = \frac{1}{h_n} (\Delta' u_n - \Delta' d_n - c_n).$$

Величины  $c_0$  и  $c_n$  даны на фиг. 103. Сумма  $\sum \Delta' d_m$  простирается на всѣ наклонные промежуточные стержни (отъ  $d_1$  до  $d_n$ ).



Фиг. 104.

**Задача.** Требуется опредѣлить линію прогибовъ нижняго пояса рѣшетчатой фермы, фиг. 105. Ферма имѣетъ въ узлѣ (0) неподвижный опорный шарниръ, въ узлѣ (5) — подвижной.

Вычисливъ при помощи формулы (10) грузы  $w_i$  до  $w_4$ , построимъ при полюсномъ разстояніи 1 веревочный многоугольникъ I II III IV V и проведемъ замыкающую линію. Эта линія опредѣляется тѣми условіями, что узелъ (5) получаетъ вертикальное перемѣщеніе  $\delta_5 = -\Delta l \sin \psi$  (гдѣ  $\Delta l$  есть измѣненіе длины хорды 0—5) и что затѣмъ  $\delta_0 = 0$ . Если 0—5 принять за хорду шарнирнаго многоугольника 0—1—2—3—4—5, то для  $\Delta l$  получается значеніе:

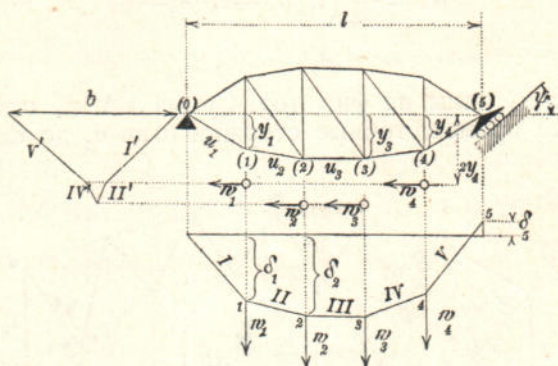
$$\Delta l = -\sum_1^4 y_m w_m + \sum_1^5 \Delta' u_m; *)$$

\*) Значеніе  $\Delta' u$  приведено на стр. 12.



первый членъ этого выраженія отрицателенъ, потому что узлы 1, 2, 3, 4 лежатъ ниже хорды 0—5. Принимая величины  $w_1, w_2, w_3, w_4$  за горизонтальныя силы, отстоящія отъ 0—5 на разстоянiяхъ  $\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3, \alpha y_4$ , причемъ  $\alpha$  произвольное число \*), и строя для этихъ горизонтальныхъ силъ веревочный многоугольникъ при полюсномъ разстоянiи 1, мы получимъ слѣдующую зависимость между отрезкомъ  $b$ , отсѣкаемымъ внѣшними боками этого веревочнаго многоугольника на продолженiи линiи 0—5, и грузами  $w$ :

$$1 \cdot b = \sum_1^4 \alpha y_m w_m, \text{ а отсюда слѣдуетъ: } \sum_1^4 y_m w_m = \frac{b}{\alpha}.$$



Фиг. 105.

Такъ какъ веревочные многоугольники  $I, II \dots$  и  $I' II' \dots$  имѣютъ одно и то же полюсное разстоянiе, то  $I' \perp I, II' \perp II, \dots$ . На фиг. 105 выбрано  $\alpha = 2$ , поэтому окончательно получается:

$$\delta_5 = -\Delta l \sin \psi = \sin \psi \left( \frac{1}{2} - \sum_1^5 \Delta' u_m \right).$$

На фиг. 105 предположено, что  $\delta_5$  отрицательно, т. е. что точка (5) перемѣщается кверху.

Если требуется представить величины  $\delta$  въ  $\nu$ -разъ большемъ масштабѣ (т. е. если полюсное разстоянiе 1 будетъ замѣнено разстоянiемъ 1:8), то въ формулу для  $\delta_5$  надо ввести значенiя  $\Delta' u$ , увеличенныя въ  $\nu$ -разъ.

**49. Площадь прогибовъ, рассматриваемая какъ площадь моментовъ. Вычисленiе прогибовъ.** Пусть  $o' 1' 2' \dots m' \dots n'$  (фиг. 106) будетъ линiей прогибовъ шарнирнаго многоугольника  $o-1-2-\dots m-\dots n$  въ направленiи перемѣщенiй  $AA'$ , а  $AB$ —закрывающей линiей. Пусть прогибъ точки  $m$ —будетъ  $\delta_m$ ; часть ординаты  $\delta_m$ , лежащую между

\*) Для болѣе плоскихъ шарнирныхъ многоугольниковъ необходимо, ради отчетливости чертежа, выбирать  $\alpha$  побольше.

веревочнымъ многоугольникомъ и прямой  $O'n'$ , обозначимъ черезъ  $\eta_m$ . Шарнирный многоугольникъ предполагается лежащимъ въ вертикальной плоскости.

Площадь, лежащую между линіей прогибовъ и прямой  $O'n'$  можно разсматривать какъ площадь моментовъ Кульмана для простой балки  $A'B'$ , подвижной опорный шарниръ которой можетъ перемѣщаться по направленію, перпендикулярному къ  $AA'$  а всѣ вообще опоры лежатъ на прямыхъ, проведенныхъ черезъ  $o$  и  $n$  параллельно направленію перемѣщеній; балка нагружена грузами  $w_1, w_2, \dots w_m, \dots w_{n-1}$ . Если величины  $w$  были вычислены посредствомъ уравненій (3) или (6) до (17), то полюсное разстояніе для веревочнаго многоугольника равно 1, а тогда между изгибающимъ моментомъ  $M_{w,m}$  для сѣченія балки  $m$  и перемѣщеніемъ  $\eta_m$  существуетъ зависимость:

$$(22) \quad 1 \cdot \eta_m = M_{w,m}$$

Если  $w_m$  было найдено изъ ур. (4), стр. 8, то полюсное разстояніе  $= E$ ; тогда получимъ:

$$(23) \quad \eta_m = \frac{M_{w,m}}{E}.$$

Такимъ образомъ опредѣленіе прогибовъ  $\eta$  сводится къ вычисленію изгибающихъ моментовъ для простой балки. Если перемѣщенія  $\delta_0$  и  $\delta_n$  извѣстны, то величины  $\delta$  послѣ опредѣленія  $\eta$  найдутся при помощи равенства:

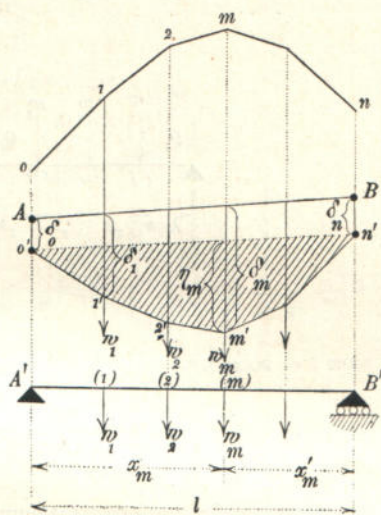
$$\delta_m = \eta_m + \delta_0 \frac{x'_m}{l} + \delta_n \frac{x_m}{l}.$$

Вычисленіе моментовъ бываетъ особенно просто тогда, когда балка  $A'B'$  нагружена симметрично и когда  $w$ -силы дѣйствуютъ на равныхъ разстояніяхъ  $\lambda$  другъ отъ друга (въ этихъ случаяхъ вычисленіе моментовъ проще, чѣмъ построение веревочнаго многоугольника). Необходимо при этомъ примѣнять правила № 165 (выпускъ IV, I томъ), вычисливъ сначала отношенія  $M_w | \lambda$  \*).

**Численный примѣръ.** Для рѣшетчатой балки, изслѣдованной на стр. 13 (фиг. 88), было получено:

$$w_1 = 0,0975; \quad w_2 = 0,1830; \quad w_3 = 0,1030; \quad w_4 = 0,575; \quad w_5 = 0,1310;$$

\*)  $M | \lambda = \frac{M}{\lambda}.$

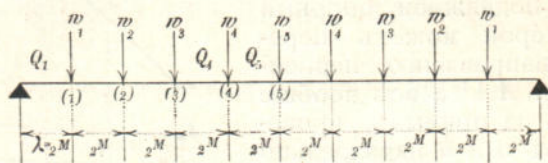


Фиг. 106.



эти значенія соотвѣтствуютъ удлиненіямъ стержней, увеличеннымъ въ 180 разъ. Количества  $w$  были вычислены посредствомъ уравн. (8) и (9), поэтому на основаніи ур. (22) получимъ:

$$\eta_m = \frac{M_{w,m}}{180} = \frac{\lambda (M_{w,m} | \lambda)}{180},$$



Фиг. 107.

и при  $\lambda = 2000$  мм.:

$$\eta_m = \frac{100}{9} (M_{w,m} | \lambda) \text{ миллиметровъ.}$$

Вычисленіе перерѣзывающихъ силъ  $Q$  и  $(M_w | \lambda)$  производится въ слѣдующемъ порядкѣ:

$Q_5 = \frac{1}{2} w_5 = 0,0655$	$(M_w . 1   \lambda) = Q_1 = 0,7065$
$+ 0,2575 = w_4$	$+ 0,6090 = Q_2$
$Q_4 = 0,3230$	$(M_w . 2   \lambda) = 1,3155$
$+ 0,1030 = w_3$	$+ 0,4260 = Q_3$
$Q_3 = 0,4260$	$(M_w . 3   \lambda) = 1,7415$
$+ 0,1830 = w_2$	$+ 0,3230 = Q_4$
$Q_2 = 0,6090$	$(M_w . 4   \lambda) = 2,0545$
$+ 0,0975 = w_1$	$+ 0,0655 = Q_5$
$Q_1 = 0,7065$	$(M_w . 5   \lambda) = 2,1300.$

Затѣмъ получимъ величины прогибовъ (причемъ  $\delta_0 = 0$  и  $\delta_n = 0$ , ср. фиг. 106):

$$\delta_1 = \eta_1 = \frac{100}{9} \cdot 0,7065 = 7,85 \text{ мм.}; \quad \delta_2 = \frac{100}{9} \cdot 1,3155 = 14,6 \text{ мм.};$$

$$\delta_3 = 19,35 \text{ мм.}; \quad \delta_4 = 22,9 \text{ мм.}; \quad \delta_5 = 23,7 \text{ мм.};$$

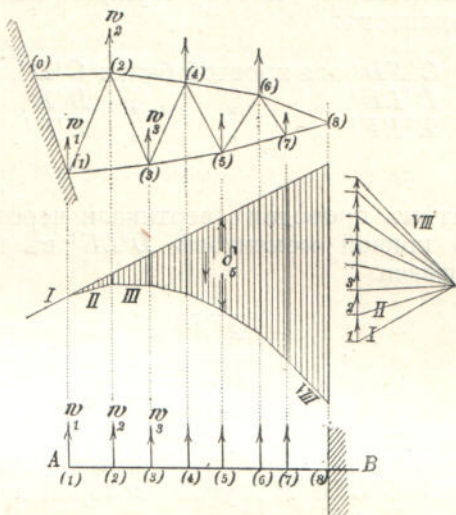
эти величины соотвѣтствуютъ перемѣщеніямъ, опредѣленнымъ графически на фиг. 88.

**50. Задачи.** Въ слѣдующихъ примѣрахъ будетъ показано примѣненіе выведенныхъ въ № 45—48 правилъ къ опредѣленію линій прогибовъ для важнѣйшихъ статически опредѣлимыхъ фермъ. Способъ разрѣшенія этихъ задачъ мы изберемъ такъ, чтобъ устранить численное опредѣленіе прогибовъ, причемъ мы всегда будемъ указывать какимъ образомъ цѣлесообразнѣе разсматривать линіи прогибовъ, какъ линіи моментовъ. Предположимъ, что величины  $w$

были опредѣлены при помощи уравн. (3) или при помощи ур. (6) до (17). Если примѣнить уравненіе (4), то нижеслѣдующія правила дадутъ намъ величины прогибовъ, увеличенныя въ  $E$ -разъ.

**1. Примѣръ.** Требуется найти прогибы  $\delta_2, \delta_3, \dots$  фермы, закрѣпленной въ одномъ концѣ, фиг. 108.

Строимъ веревочный многоугольникъ для воображаемыхъ силъ  $w_1$  до  $w_7$  (на фиг. 108 онѣ приняты отрицательными, т. е. направленными вверхъ) и первый бокъ многоугольника продолжимъ до замыкающей линіи. Стрѣлка, стоящая около  $\delta_5$ , даетъ направление положительныхъ перемѣщеній. Заштрихованную площадь прогибовъ можно разсматривать, какъ площадь моментовъ для балки  $AB$ , закрѣпленной однимъ концомъ  $B$  въ стѣнѣ и нагруженной силами  $w_1, w_2, \dots$ . Такимъ образомъ, если вычислены для этой балки моменты  $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$ , то получимъ:

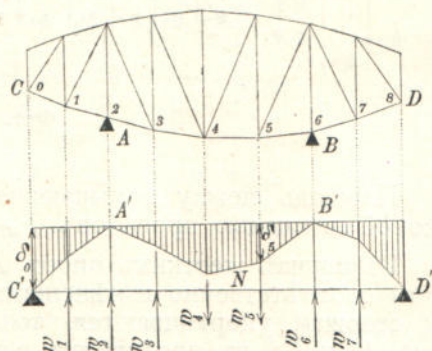


Фиг. 108.

$$\delta_m = M_{w.m.}$$

**2. Примѣръ.** Требуется найти вертикальныя перемѣщенія узловъ нижняго пояса *рышетчатой* балки со свѣшивающимися концами, фиг. 109. Какая изъ опоръ  $A$  или  $B$  перемѣщается по горизонтальному направленію, совершенно безразлично.

Опредѣлимъ (графически или вычисленіемъ) кривую моментовъ  $C'A'NB'D'$  для балки, свободно лежащей на двухъ опорахъ  $C'$  и  $D'$ , на которую дѣйствуютъ грузы  $w_1, w_2, \dots$  (на фиг. 109 нѣкоторые грузы приняты положительными, т. е. направленными внизъ, нѣкоторые—отрицательными, т. е. направленными вверхъ); затѣмъ проводимъ вертикали опорныхъ точекъ до пересѣченія въ  $A'$  и  $B'$  съ кривою моментовъ и черезъ эти точки проводимъ замыкающую. Заштрихованная площадь и будетъ требуемой площадью прогибовъ. Напр., прогибы узловъ 0 и 5 равны соотвѣтственно  $\delta_0$  и  $\delta_5$ .



Фиг. 109.



**3. Примѣръ.** Требуется построить площадь прогибовъ верхняго пояса балки *Гербера*, фиг. 110. Распредѣленіе подвижныхъ опорныхъ шарнировъ не имѣетъ вліянія.

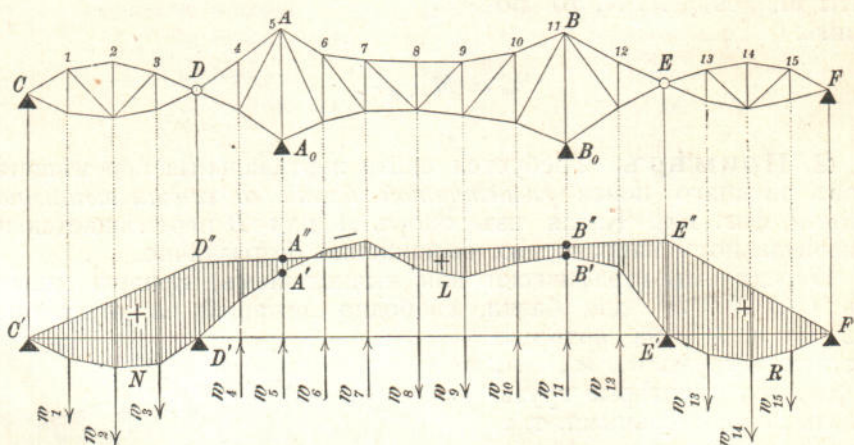
По вычислении величин  $w$ , которые получаются частью положительными, частью отрицательными, строимъ слѣдующія кривыя моментовъ:

$C'ND'$	для простой балки	$C'D'$	нагруженной силами	$w_1$	до	$w_3$
$D'LE'$	"	"	"	$w_4$	"	$w_{12}$
$E'RF'$	"	"	"	$w_{13}$	"	$w_{15}$

Затѣмъ проводимъ вертикали черезъ точки  $A$  и  $B$  до пересѣченія съ кривою моментовъ  $D'LE'$  въ точкахъ  $A'$  и  $B'$ , откладываемъ отрезки:

$$\begin{aligned} \overline{A'A''} &= \delta' = \text{пониженію точки } A, \\ \overline{B'B''} &= \delta'' = \text{ " " " } B \end{aligned}$$

и наконец проводимъ черезъ точки  $A''$  и  $B''$  ломанную замыкающую  $C'D''E''F'$ , углы которой лежатъ на вертикаляхъ подъ точками  $D$  и  $E$ .



Фиг. 110.

Площадь между замыкающей и кривой моментов и будет-  
искомой площадью прогибов.

Въ случаѣ жесткихъ опоръ  $A_0$  и  $B_0$  величины  $\delta'$  и  $\delta''$  будутъ равны соответственно измѣненіямъ длины стоекъ  $AA_0$  и  $BB_0$ . Если эти стержни укорачиваются, то точки  $A''$  и  $B''$  будутъ лежать выше  $A'$  и  $B'$ , въ противномъ случаѣ — ниже.

4. Примѣръ. Требуется отыскать линію прогибовъ для верхняго пояса *трехшарнирной рѣшетчатой арки*, фиг. III. Пусть

величины  $w_1$  до  $w_3$  и  $w_5$  до  $w_7$  будутъ вычислены по № 46 посредствомъ измѣненій угловъ  $\Delta\theta$ . Если  $w_4$  также извѣстно, то мы имѣемъ возможность найти кривую моментовъ для простой балки  $A'B'$ , нагруженной грузами  $w$ , а затѣмъ опредѣлить и прогибы  $\delta_m = M_{w.m.}$ . Для возможности вычисления  $w_4$  необходимо знать измѣненіе угла  $\Delta\theta_4$ , а это измѣненіе можно опредѣлить слѣдующимъ путемъ.

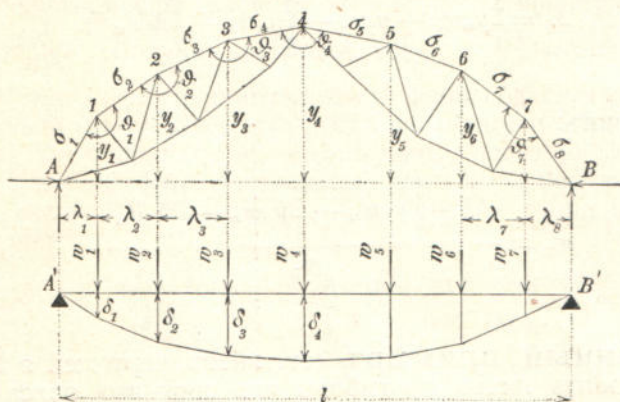
По уравн. (4), № 44 (выпускъ VI), найдемъ сначала измѣненіе  $\Delta l$  пролета  $AB$  для случая  $t=0$ , обусловленное измѣненіями угловъ  $\theta$  и напряжениями  $\sigma$  въ стержняхъ пояса:

$$\Delta l = y_1 \Delta\theta_1 + y_2 \Delta\theta_2 + y_3 \Delta\theta_3 + y_4 \Delta\theta_4 + y_5 \Delta\theta_5 + y_6 \Delta\theta_6 + y_7 \Delta\theta_7 + \frac{\sigma_1}{E} \lambda_1 + \frac{\sigma_2}{E} \lambda_2 + \dots + \frac{\sigma_8}{E} \lambda_8,$$

а вмѣстѣ съ этимъ, при данномъ перемѣщеніи  $\Delta l$ , получимъ для  $\Delta\theta_4$  значеніе:

$$(24) \quad \Delta\theta_4 = \frac{\Delta l - \sum_1^3 y_m \Delta\theta_m - \sum_5^7 y_m \Delta\theta_m - \sum_1^8 \frac{\sigma_m}{E} \lambda_m}{y_4}.$$

При жесткихъ опорахъ  $\Delta l = 0$ . Если опоры  $A$  и  $B$  связаны между собой затяжкой съ поперечнымъ сѣченіемъ  $F_0$ , то  $\Delta l$  равно



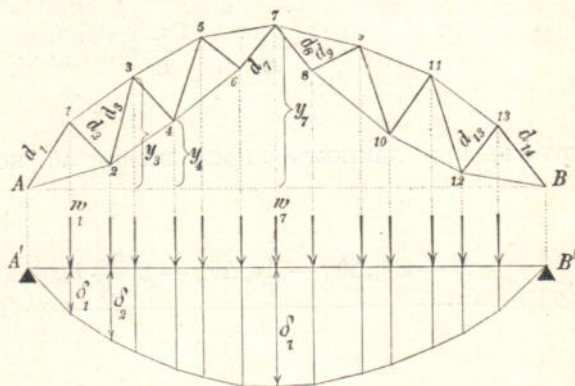
Фиг. 111.

удлинению этой затяжки, принимающей на себя горизонтальный распоръ арки  $H$ ; тогда имѣемъ  $\Delta l = \frac{Hl}{EF_0}$ . Если требуется принять во вниманіе измѣненія температуры, то напряжения  $\sigma$  въ уравн.



(24) надо замѣнить количествами  $\sigma_m + \varepsilon Et_m$ , а вмѣсто  $\Delta l$  ввести величину  $\frac{Hl}{EF_0} + \varepsilon t_0 l$ , гдѣ  $t_m$  означаетъ измѣненіе температуры для стержня  $s_m$  верхняго пояса и  $t_0$  измѣненіе температуры для затяжки  $AB$ .

Желая опредѣлить линію прогибовъ безъ вычисленія измѣненій угловъ, мы должны найти сначала  $w_1$  до  $w_6$  (фиг. 112) и  $w_8$  до  $w_{13}$  при помощи формулъ, выведенныхъ въ № 47, и примѣнить равенство:



Фиг. 112.

$$\Delta l = \sum_1^6 y_m w_m + y_7 w_7 + \sum_8^{13} y_m w_m + \sum_1^{14} \Delta' d_m^*).$$

Тогда получимъ:










$$w_7 = \frac{\Delta l - \sum_1^6 y_m w_m - \sum_8^{13} y_m w_m - \sum_1^{14} \Delta' d_m}{y_7}.$$

**Численный примѣръ** (см. листъ чертежей 2 bis). Требуется построить линію прогибовъ для нижняго пояса трехшарнирной рѣшетчатой арки, фиг. 113, для того случая, когда на ферму дѣйствуетъ сосредоточенный грузъ въ 1000 кг., приложенный къ среднему шарниру.

Всѣ стержни образованы изъ углового желѣза; площади по-

\*) Стержни  $A1$ ,  $6-7$ ,  $7-8$ , и  $13B$  здѣсь удобнѣе будетъ обозначить буквами  $d_1$ ,  $d_7$ ,  $d_8$ ,  $d_{14}$ .

перечныхъ сѣченій (безъ вычета на заклепки) приведены въ слѣдующей таблицѣ, а также на фиг. 113.

	Форма сѣченій.	Размѣры уголковъ.	Площадь попереч. сѣченія.
Верхній поясъ . . . . .		80 . 80 . 10 мм.	30 см. <sup>2</sup>
Нижній поясъ . . . . .		90 . 90 . 11 "	74 "
Крайнія стойки . . . . .		90 . 90 . 11 "	37 "
Стойка (1) . . . . .		80 . 80 . 10 "	30 "
Стойки (2) (3) (4) . . . . .		60 . 60 . 10 "	22 "
1-ый раскосъ . . . . .		90 . 90 . 11 "	37 "
2-ой и 5-ый раскосы . . . . .		80 . 80 . 10 "	30 "
3-ий раскосъ . . . . .		70 . 70 . 10 "	26 "
4-ый раскосъ . . . . .		60 . 60 . 10 "	22 "

Числа, вписанныя въ лѣвой половинѣ фермы (фиг. 113), означаютъ напряженія (въ *килогр.*); эти числа легко получить при помощи діаграммы Кремоны. [Разсматриваемая ферма была изслѣдована въ первомъ томѣ въ § 48, № 198 и въ § 49 (выпускъ V) для различныхъ случаевъ нагрузки. Напряженія, данныя на фиг. 113, соотвѣтствуютъ напряженіямъ, которыя были обозначены раньше буквами  $S_6$  и которыя находятся на таблицѣ въ § 49 (томъ I, выпускъ V); напряженія написаны въ *тоннахъ*. Недостающее тамъ напряженіе въ первомъ стержнѣ нижняго пояса найдемъ, дѣля величину горизонтальнаго распора  $H=1875^k$  на косинусъ угла наклоненія стержня; получимъ *сжатіе*:  $1875 \cdot \frac{333}{350} = 2081^k$ ].

Черныя числа на правой половинѣ фермы (фиг. 113) означаютъ длину стержней (въ *см.*); фиг. 114 даетъ наглядное изображеніе измѣненій длины, увеличенныхъ въ 10 000 разъ (нанесено въ масштабѣ 1:40). Эти значенія были вычислены для  $E=1\ 800\ 000$  клгр./см.<sup>2</sup> (сварочное желѣзо); такъ напр., для перваго стержня верхняго пояса получаемъ:

$$10\ 000\ \Delta o_1 = \frac{10\ 000 \cdot O_1 o_1}{EF} = + \frac{10\ 000 \cdot 315 \cdot 300}{1\ 800\ 000 \cdot 30} = + 17,5\ \text{см.} \\ = + 175\ \text{мм.},$$

для діагонали первой панели:

$$10\ 000\ \Delta d_1 = \frac{10\ 000 \cdot D_1 d_1}{EF} = - \frac{10\ 000 \cdot 509 \cdot 485}{1\ 800\ 000 \cdot 37} = - 37,1\ \text{см.} \\ = - 371\ \text{мм.}$$

и для крайней стойки:

$$10\ 000\ \Delta h_0 = \frac{10\ 000 \cdot V_0 h_0}{EF} = + \frac{10\ 000 \cdot 400 \cdot 525}{1\ 800\ 000 \cdot 37} = + 31,5\ \text{см.} \\ = + 315\ \text{мм.}$$



По вычисленіи этихъ измѣненій длины значенія  $\Delta'u$ ,  $\Delta'd$  (ср. стр. 14) опредѣляются графически. Для перваго стержня нижняго пояса, напр., было найдено значеніе 10 000  $\Delta'u = -638$  мм., обозначенное жирной линіей, совпадающей съ даннымъ стержнемъ; для перваго раскоса: 10 000  $\Delta'd = -600$  мм. Грузы  $w$  опредѣлены при помощи уравн. (10), стр. 15, такъ какъ промежуточные стержни имѣютъ расположеніе, показанное на фиг. 91. Въ данномъ случаѣ  $\Delta'o = \Delta_o$  и  $b_m = a_m$ , ср. фиг. 91, и, слѣдовательно:

$$w_m = \frac{1}{h_m} (-\Delta o_m + \Delta'u_{m-1} + \Delta'd_m - \Delta'd_{m+1} - a_{m-1} + a_m).$$

Значенія  $a$ , увеличенныя въ 10 000 разъ, также даны на фиг. 114 \*). Отбрасывая множитель 10 000, получимъ:

$$\begin{array}{l} w_1 = \frac{1}{3810} [-175 - 600 - 600 + 477 - 400 + 201] = -0,29 \quad y_1 w_1 = -417,6 \text{ мм.} \\ w_2 = \frac{1}{2690} [-372 - 633 - 477 + 300 - 201 + 77] = -0,49 \quad y_2 w_2 = -1254,4 \text{ " } \\ w_3 = \frac{1}{1890} [-529 - 663 - 300 - 104 - 77 - 11] = -0,89 \quad y_3 w_3 = -2990,4 \text{ " } \\ w_4 = \frac{1}{1410} [-473 - 616 + 104 - 601 + 11 - 53] = -1,15 \quad y_4 w_4 = -4416,0 \text{ " } \\ \Sigma \Delta'u = -(577 + 600 + 633 + 663 + 616) \cdot 2 = -6178. \quad \frac{4}{1} \Sigma yw = -9078,4 \text{ мм.} \end{array}$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ:

$$\Delta l = 2 \frac{4}{1} \Sigma yw + y_5 w_5 + \Sigma \Delta'u,$$

то получимъ:

$$w_5 = - \frac{\left( \frac{4}{1} \Sigma yw \right) 2 + \Sigma \Delta'u}{y_5} = + \frac{9078,4 \cdot 2 + 6178}{4000} = +6,08.$$

Ординаты  $\delta_1, \delta_2, \dots$  искомой линіи прогибовъ должны быть сначала вычислены, а для этой цѣли ихъ надо принять за величины изгибающихъ моментовъ простой балки, нагруженной грузами  $w_1, w_2, \dots$ . Для значеній  $(M_w | \lambda)$  получаемъ слѣдующую таблицу:

$$\begin{array}{l|l} Q_5 = \frac{1}{2} w_5 = 3,04 & (M_{w.1} | \lambda) = Q_1 = 0,22 \\ \quad \quad \quad -1,15 = w_4 & \quad \quad \quad +0,53 = Q_2 \\ Q_4 = +1,89 & (M_{w.2} | \lambda) = +0,73 \\ \quad \quad \quad -0,89 = w_3 & \quad \quad \quad +1,00 = Q_3 \\ Q_3 = +1,00 & (M_{w.3} | \lambda) = +1,73 \\ \quad \quad \quad -0,49 = w_2 & \quad \quad \quad +1,89 = Q_4 \\ Q_2 = +1,51 & (M_{w.4} | \lambda) = +3,62 \\ \quad \quad \quad -0,29 = w_1 & \quad \quad \quad +3,04 = Q_5 \\ Q_1 = +0,22 & (M_{w.5} | \lambda) = +6,66 \end{array}$$

\*) Отрѣзокъ, изображающій  $a_2$ , не нанесенъ, такъ какъ онъ весьма малъ.



Такъ какъ въ формулу для  $w$  были введены измѣненія длины увеличенныя въ 10 000 разъ, то найдемъ теперь:

$$\delta_m = \frac{M_w}{10\,000} = \frac{\lambda (M_{wm} | \lambda)}{10\,000} = \frac{3\,000 (M_{wm} | \lambda)}{10\,000}, \text{ а отсюда}$$

$$\delta_1 = 0,3 \cdot 0,22 = 0,066 \text{ мм.}$$

$$\delta_2 = 0,3 \cdot 0,73 = 0,219 \text{ мм.}$$

$$\delta_3 = 0,3 \cdot 1,73 = 0,519 \text{ мм.}$$

$$\delta_4 = 0,3 \cdot 3,62 = 1,086 \text{ мм.}$$

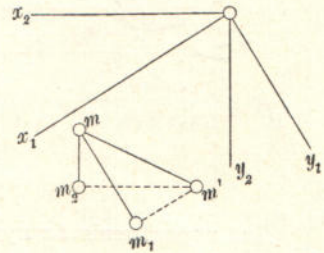
$$\delta_5 = 0,3 \cdot 6,66 = 1,998 \text{ мм.}$$

При графическомъ опредѣленіи этихъ значеній, а именно въ масштабѣ 25:1, надо принять для полюснаго разстоянія веревочнаго многоугольника, построеннаго для грузовъ  $w$ , величину  $10\,000 \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{25} = \frac{4}{3}$ , потому что линейный масштабъ чертежа

фермы = 1:300. Значенія  $w$  и полюсное разстояніе суть числа, для которыхъ на фиг. 113 былъ выбранъ масштабъ 1 = 12 мм.

По опредѣленіи линіи прогибовъ *нижняго* пояса легко получить линію прогибовъ и для *верхняго* пояса, зная, что разстояніе двухъ узловъ  $m$ , лежащихъ на одной и той же вертикали, измѣняется на величину  $\Delta h_m$ . Поэтому для верхняго узла 2 получится вертикальное перемѣщеніе  $0,219 - \Delta h_2 = 0,219 - 0,012 = 0,207$  мм. На фиг. 113 вписаны округленныя значенія прогибовъ.

**51. Полное опредѣленіе перемѣщеній.** При построеніи линіи прогибовъ мы получаемъ только проекціи перемѣщеній узловъ на какое нибудь неподвижное направленіе, но не самыя перемѣщенія. Если же требуется опредѣлить полныя перемѣщенія рѣшетки, при желаніи разрѣшить данную задачу съ помощью веревочнаго многоугольника, то придется строить *двѣ* линіи прогибовъ. Если при этомъ ферма была отнесена разъ къ осямъ координатъ  $(x_1, y_1)$ , потомъ къ осямъ  $(x_2, y_2)$ , фиг. 115, и если  $mt_1$  и  $mt_2$  представляютъ собой ординаты линіи прогибовъ для узла  $m$  въ направленіи  $y_1$  и  $y_2$ , то перемѣщеніе  $mm'$  точки  $m$  опредѣлится условіемъ:  $m_1m' \perp m_1m$ ,  $m_2m' \perp m_2m$ . Приведемъ еще другой способъ построенія перемѣщеній (имѣющій больше преимуществъ), который заключается въ примѣненіи къ построенной уже *одной* линіи прогибовъ способа шарнирнаго многоугольника, описаннаго въ § 2 (выпускъ VI). Способъ этотъ примѣненъ къ фиг. 116.



Фиг. 115.

Пусть будутъ даны перемѣщенія  $\Delta y$  шарнирнаго многоугольника 0 — 1 — 2 — 3 — . . . , отнесеннаго къ прямоугольнымъ осямъ координатъ  $(x, y)$ ; кромѣ того пусть будетъ извѣстно перемѣщеніе  $\Delta x$  какого нибудь узла. Требуется построить полныя перемѣщенія всѣхъ узловъ.

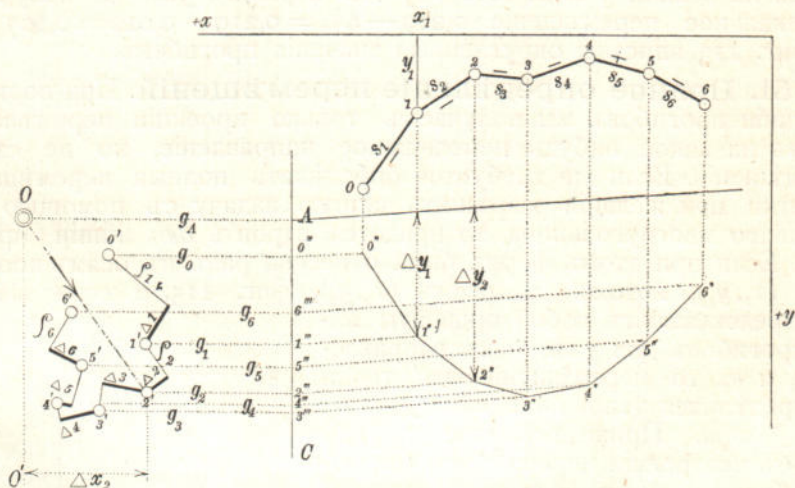
Пусть  $AB$  будетъ замыкающей линіей для линіи прогибовъ 0'' 1'' 2'' 3'' . . . . Спроектируемъ точки 0'', 1'', 2'', . . . при помощи линій, параллельныхъ  $AB$ , на прямую, параллельную оси  $y$ , которая



пересѣкается замыкающей линіей въ точкѣ  $A$ ; черезъ  $A$  и черезъ проекціи  $o'''$ ,  $1'''$ ,  $2'''$ , . . . точекъ  $o''$ ,  $1''$ ,  $2''$  проведемъ прямыя  $g_A$ ,  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ , . . . параллельно оси  $x$ . На прямой  $g_A$  возьмемъ произвольно полюсъ  $O$  требуемой диаграммы перемѣщений и опредѣлимъ сначала перемѣщеніе того узла, для котораго  $\Delta x$  уже извѣстно.

На фиг. 116 считается даннымъ  $\Delta x_2$ ; затѣмъ строится лучъ  $O2'$ , который изображаетъ перемѣщеніе точки 2 по величинѣ, направленію и теченію; конечная точка его  $2'$  лежитъ на прямой  $g_2$  (потому что проекція  $O2'$  на направленіе  $y$  должна равняться  $\Delta y_2$ ) въ разстояніи  $\Delta x_2$  (считаемомъ отрицательнымъ) отъ прямой  $OO'$  проведенной черезъ  $O$  параллельно оси  $y$ .

Отложимъ теперь отъ  $2'$  отрезокъ  $\Delta_2$ , параллельно стержню  $s_2$ , равняющійся измѣненію длины  $s_2$  и имѣющій теченіе 2—1, или 1—2 смотря по тому—растянуть ли стержень  $s_2$  или сжать; въ конечной точкѣ  $\Delta_2$  возставимъ къ  $\Delta_2$  перпендикуляръ ( $p_2$ ), который пересѣкаетъ прямую  $g_1$  въ точкѣ  $1'$ ; тогда полюсный лучъ  $O1'$  представитъ по величинѣ, направленію и теченію перемѣщеніе узла 1, что намъ извѣстно изъ изученія способа шарнирнаго многоугольника (§ 2—выпускъ VI). Подобнымъ же образомъ опредѣляется положеніе точки  $o'$  а затѣмъ—исходя опять изъ  $2'$ —по порядку точки  $3'$ ,  $4'$ ,  $5'$ ,  $6'$ . На фиг. 116 было предположено, что всѣ стержни, за исключеніемъ  $s_5$ , сжаты.



Фиг. 116.

Для опредѣленія  $\Delta x$  путемъ вычисленій надо продифференцировать уравненіе

$$s_m^2 = (x_{m-1} - x_m)^2 + (y_{m-1} - y_m)^2$$

и замѣнить знакъ дифференціала знакомъ  $\Delta$ . Тогда получимъ:

$$2s_m \Delta s_m = 2(x_{m-1} - x_m)(\Delta x_{m-1} - \Delta x_m) + 2(y_{m-1} - y_m)(\Delta y_{m-1} - \Delta y_m),$$

а отсюда

$$\Delta x_{m-1} - \Delta x_m = \frac{\Delta s_m}{\cos \beta_m} - (\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) \operatorname{tg} \beta_m,$$



гдѣ  $\beta_m$  означаетъ уголъ наклоненія стержня  $s_m$  къ оси —  $x$ . Зная такимъ образомъ одно изъ обоихъ значеній  $\Delta x_{m-1}$  и  $\Delta x_m$ , мы имѣемъ возможность дать и другое значеніе; а слѣдовательно при помощи данной формулы и посредствомъ способа, выведеннаго въ № 49 для опредѣленія  $\Delta y$ , мы можемъ найти всѣ составляющія перемѣщеній  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  шарнирнаго многоугольника *путемъ вычисленій*, если только будутъ извѣстны *одно* значеніе  $\Delta x$  и *два* значенія  $\Delta y$ . Другой численный способъ можно легко вывести путемъ проектированія на двѣ прямоугольныя оси  $x$  и  $y$  ломанной линіи, составленной изъ отрѣзковъ  $\Delta s$  и  $p$ , какъ это было приведено въ § 2 (выпускъ VI).

**52. Примѣненіе вспомогательнаго шарнирнаго многоугольника.** Способъ построенія перемѣщеній, показанный на фиг. 116, приобретаетъ особенную наглядность тогда, когда всѣ  $\Delta s = 0$ , потому что діаграмма перемѣщеній будетъ состоять тогда изъ одной ломанной линіи  $o' 1' 2' \dots$ , вершины которой  $o', 1', 2', \dots$  лежатъ на прямыхъ  $g_0, g_1, g_2, \dots$ , а стороны  $o' - 1', 1' - 2', \dots$  перпендикулярны къ соответствующимъ направленіямъ стержней  $o - 1, 1 - 2, \dots$  \*). Необходимо также замѣтить, что въ случаѣ исчезновенія величинъ  $\Delta s$  для грузовъ  $w$  получаются (по уравн. 3, стр. 8) количества, *независимыя отъ положенія осей координатъ  $x, y$*

$$w_m = \Delta \vartheta_m;$$

поэтому для построенія перемѣщеній узловъ *упругаго* шарнирнаго многоугольника бываетъ иногда выгоднѣе замѣнить такой многоугольникъ — шарнирнымъ многоугольникомъ съ *жесткими* стержнями \*\*).

Такой *вспомогательный шарнирный многоугольникъ* легко получить, если мы между каждыми двумя сосѣдними узлами  $m - 1, m$  возьмемъ новый узелъ  $m_0$  и соединимъ его съ  $m - 1$  и  $m$  жесткими стержнями (на фиг. 117 они показаны пунктиромъ). Новый уголъ у узла  $m$  будетъ  $\alpha_m = \vartheta_m + \omega_m + \chi_{m+1}$ , а уголъ у  $m_0$  будетъ  $\tau_m$ . Измѣненія угловъ  $\tau_m$  и  $\alpha_m$  будутъ:

$$\Delta \tau_m = \frac{\Delta s_m}{s_m} (\cotg \chi_m + \cotg \omega_m)$$

$$\Delta \alpha_m = \Delta \vartheta_m + \Delta \omega_m + \Delta \chi_{m+1} = \Delta \vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \cotg \chi_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \cotg \omega_{m+1}.$$

\*) Ср. также фиг. 79 въ № 43 — выпускъ VI. Это правило было выведено тамъ другимъ путемъ.

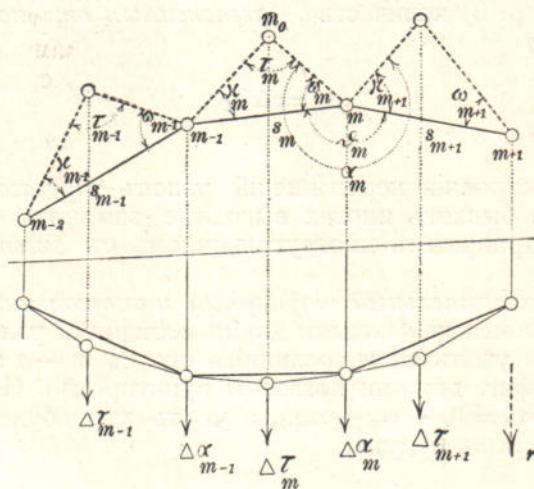
\*\*) То обстоятельство, что  $w_m = \Delta \vartheta_m$  не зависитъ отъ положенія координатныхъ осей ( $x, y$ ), упрощаетъ примѣненіе обѣихъ линій прогибовъ. Если оба направленія, по которымъ должны быть направлены грузы  $w$ , образуютъ уголъ  $\psi$ , то надо только предположить, что многоугольникъ силъ послѣ построенія первой линіи прогибовъ повернуть на уголъ  $\psi$ , чтобы убѣдиться, что каждая сторона втораго веревочнаго многоугольника должна образовать съ соответствующей стороной первой линіи прогибовъ уголъ  $\psi$ . Ввиду того, что продажные треугольники имѣютъ углы:  $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ , для  $\psi$  придется выбрать одинъ изъ этихъ угловъ. Дальнѣйшей зависимости между обѣими линіями прогибовъ мы не разсматриваемъ, такъ какъ ломанная линія  $o' 1' 2' 3' \dots$ , строится легко и изъ нея сразу получаемъ перемѣшенія по величинѣ и направленію; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ мы избегаемъ сложенія составляющихъ перемѣщеній (по фиг. 115).



Разсматривая  $\Delta\tau$  и  $\Delta\alpha$  какъ силы, дѣйствующія въ направленіи  $r$ , и соединяя эти силы веревочнымъ многоугольникомъ съ полюснымъ разстояніемъ единицы, мы увидимъ, что этотъ веревочный многоугольникъ будетъ линіей прогибовъ въ направленіи  $r$  шарнирнаго многоугольника, состоящаго изъ жесткихъ стержней, и что вписанный многоугольникъ, углы котораго соответствуютъ узламъ . . .  $(m-2)$ ,  $(m-1)$ ,  $m$ ,  $(m+1)$  . . . , будетъ линіей прогибовъ для упругаго шарнирнаго многоугольника . . .  $(m-2)(m-1)m(m+1)$  . . .

Точки  $m_0$  надо такъ выбирать, чтобъ котангенсы угловъ  $\chi$  и  $\omega$  представляли круглыя числа. Если, напр., выбрать  $\omega_m = \chi_m = 45^\circ$ , то получимъ простыя выраженія:

$$\Delta\tau_m = 2 \frac{\Delta s_m}{s_m} \text{ и } \Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}. *)$$



Фиг. 117.

Если коэффициентъ упругости  $E$  имѣетъ одно и то же значеніе для всѣхъ стержней, то грузы  $\Delta\tau$  и  $\Delta\alpha$  надо замѣнить грузами  $E\Delta\tau$  и  $E\Delta\alpha$  и полюсное разстояніе 1 — разстояніемъ  $E$ . Если не желаемъ принимать во вниманіе измѣненій температуръ, то въ предыдущія

\*) Если кромѣ линіи прогибовъ требуется получить еще полное построеніе диаграммы перемѣщеній, пользуясь ломанной линіей  $o' 1' 2' \dots$ , но безъ дополнительныхъ расчетовъ, то надо обращать вниманіе на то, чтобъ ни одинъ изъ новыхъ жесткихъ стержней не имѣлъ направленія  $r$ . Этотъ дополнительный расчетъ, который состоитъ въ опредѣленіи значенія  $\rho$  для каждаго стержня, совпадающаго съ направленіемъ  $r$ , какъ легко видѣть, не труденъ, но онъ все-таки сложенъ, чѣмъ выборъ особенныхъ угловъ  $\omega$  и  $\chi$  для этихъ стержней шарнирнаго многоугольника. Если требуется опредѣленіе одной линіи прогибовъ, то стержни могутъ имѣть и направленіе  $r$ , потому что конечнымъ точкамъ такого стержня будутъ соответствовать равновеликія перемѣщенія въ томъ же направленіи  $r$ . Надо замѣтить также, что грузы  $\Delta\tau$  и  $\Delta\alpha$  должны соединяться веревочнымъ многоугольникомъ въ такомъ порядкѣ . . .  $\Delta\tau_{m-1}$ ,  $\Delta\alpha_{m-1}$ ,  $\Delta\tau_m$ ,  $\Delta\alpha_m$ ,  $\Delta\tau_{m+1}$ ,  $\Delta\alpha_{m+1}$  . . .

формулы вмѣсто относительныхъ удлинений  $\frac{\Delta s}{s}$  войдутъ напряженія  $\sigma$ . Если  $\omega = \alpha = 45^\circ$ , то получимъ

$$E\Delta\tau_m = 2\sigma_m, \quad E\Delta\alpha_m = E\Delta\vartheta_m - \sigma_m - \sigma_{m+1}. \quad *)$$

Для положенія вспомогательныхъ точекъ  $m_0$ , указаннаго на фиг. 118, получимъ:

$$\Delta\tau_m = -\frac{\Delta s_m}{s_m} (\cotg \alpha_m + \cotg \omega_m)$$

$$\Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m + \frac{\Delta s_m}{s_m} \cotg \alpha_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \cotg \omega_{m+1}.$$

Какое изъ двухъ расположений выбрать (фиг. 117 или фиг. 118) для результата совершенно безразлично. Для получения болѣе наглядныхъ диаграммъ надо стремиться выбирать для грузовъ  $w$  по возможности одинаковые знаки. Такъ напримѣръ, въ простыхъ балочныхъ мостахъ для количествъ  $\Delta\alpha$  верхняго, а также нижняго пояса получаются обыкновенно положительныя значенія, а вслѣдствіе этого при изслѣдованіи верхняго пояса надо выбрать расположеніе, указанное на фиг. 118, потому что  $\Delta s$  и  $\sigma$  для стержней верхняго пояса имѣютъ отрицательныя значенія. Для нижняго пояса лучше выбрать расположеніе, принятое на фиг. 117.

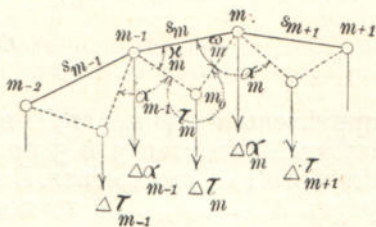
Примѣненіе вспомогательнаго шарнирнаго многоугольника можетъ служить къ рѣшенію задачи, приведенной на стр. 10 до 18: опредѣлить грузы  $w_m$ , не вычисляя предварительно измѣненій угловъ  $\Delta\vartheta$ . Этотъ способъ примѣняется, конечно, тогда, когда не требуется знать измѣненій угловъ для какой нибудь другой цѣли \*\*); объяснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ, фиг. 119.

Требуется построить линію прогибовъ (въ направленіи  $r$ ) для пояса . . .  $(m-1) \ m \ (m+1)$  . . . простой треугольной сѣти. Грузы  $\Delta\tau_m$ , соответствующіе вспомогательнымъ узламъ  $m_0$ , вычисляются по предыдущему, а грузъ  $w_m$  для узла  $m$  пояса, по уравненію, приведенному на стр. 12:

$$w_w = \Sigma \mu \cdot \Delta s.$$

\*) Ср. стр. 8. Вліяніе измѣненія температуры  $t$  можно также ввести въ расчетъ, подставляя  $\sigma + \epsilon Et$  вмѣсто  $\sigma$ .

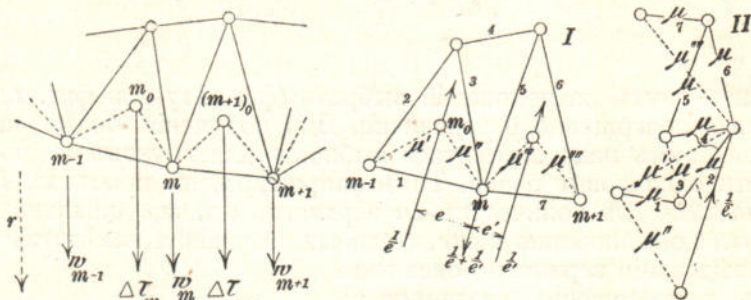
\*\*) Напр., для опредѣленія дополнительныхъ напряженій. Ср. также № 42 (выпускъ VI).



Фиг. 118.



Здѣсь  $\mu$  означаетъ напряженіе, которое вызывается въ стержнѣ выдѣленной части рѣшетки (фиг. 119<sup>I</sup>) отъ дѣйствія трехъ внѣшнихъ параллельныхъ силъ  $\frac{1}{e}$ ,  $\frac{1}{e'}$ ,  $\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right)$ , находящихся между собой въ равновѣсїи;  $\Delta s$  означаетъ измѣненіе длины стержня для того состоянія нагрузки, для котораго строится линия прогибовъ  $e$  и  $e'$  — взаимныя разстоянія тѣхъ 3 силъ, направленіе которыхъ, въ виду прежняго вывода уравненія  $w_m = \sum \mu \Delta s$ , было предположено параллельнымъ  $w$ , а теперь можетъ быть выбрано произвольно, потому что вѣдь величина количествъ  $w$  для шарнирнаго многоугольника, составленнаго изъ жесткихъ частей, не зависитъ отъ направленія  $r$ . Сумма  $\sum$  простирается на стержни, обозначенные на фиг. 119<sup>I</sup> цифрами 1, 2, 3, . . . 6, 7, напряженія для которыхъ



Фиг. 119.

опредѣлены на фиг. 119<sup>II</sup> при помощи діаграммы Кремоны. Для стержней рѣшетки 3 и 5 получаются растягивающія усилія  $\mu$ , для остальныхъ — сжимающія. Если измѣненія длины стержней 1, 2, 3, . . . будутъ  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , . . . то получимъ:

$$w_m = -\mu_1 \Delta_1 - \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \Delta_3 - \mu_4 \Delta_4 + \mu_5 \Delta_5 - \mu_6 \Delta_6 - \mu_7 \Delta_7.$$

Для силы  $\frac{1}{e}$  слѣдуетъ выбрать такое направленіе, чтобъ величина  $e$  выражалась постояннымъ, круглымъ числомъ. При опредѣленіи различныхъ количествъ  $w$  надо принимать и для силъ различныя направленія.

Важное примѣненіе вспомогательнаго шарнирнаго многоугольника описано въ № 35 (выпускъ VI).

### Задачи для упражненія къ §§ 1—3.

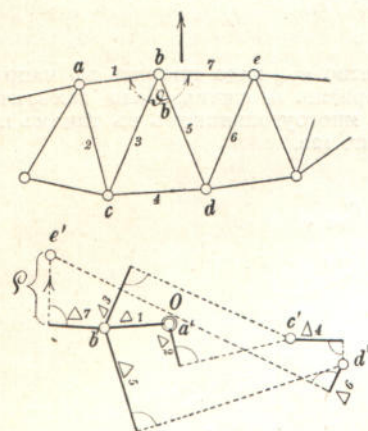
**Задача 1.** Требуется опредѣлить измѣненіе  $\Delta \vartheta$  угла  $\vartheta$  въ рѣшѣткѣ фиг. 120, при помощи діаграммы перемѣщеній по Виллію.

**Рѣшеніе.** Надо принять точку  $a$  и направленіе стержня  $ab$  неподвижными и опредѣлить по № 32 (выпускъ VI), по порядку перемѣщенія  $Ob'$ ,  $Oc'$ ,  $Od'$ ,  $Oe'$  точекъ  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и затѣмъ предположить, что перемѣщеніе  $e$  опредѣлено по

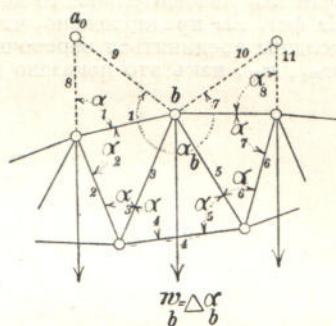
Способу шарнирного многоугольника. Тогда узнаем, что перпендикуляр, опущенный из  $e'$  на  $\Delta 7$ , равняется  $s_7 \Delta \vartheta_b$ , откуда получим:

$$\Delta \vartheta_b = \frac{\rho}{s_7}.$$

Направление вращения  $s_7$  относительно  $s_1$  указано на фиг. стрелкой. Мы предполагаем, что стержни 2, 4, 5 растянуты, а остальные сжаты.



Фиг. 120.



Фиг. 121.

**Задача 2.** При построении линии прогибов для верхнего пояса рѣшетки, фиг. 121, надо определить грузъ  $w_b$  при помощи диаграммы Виллио, не вычисляя отдельно величины  $\Delta \vartheta_b$ .

*Рѣшение.* Прибавимъ произвольной длины жесткіе стержни 8 и 11, параллельные направлению  $w_b$ , а затѣмъ введемъ стержни 9 и 10. Тогда, если полюсное разстояніе выбрано = 1, получимъ  $w_b = \Delta ab$ , значение, которое опредѣляется по только что указанному способу. При этомъ неподвижными надо принять точку  $a_0$  и направление стержня 9.

**Задача 3.** Надо доказать, что для фиг. 121 при полюсномъ разстояніи =  $E$  и при  $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E}$  грузъ  $w_b$  можетъ быть вычисленъ по формулѣ

$$w_b = \cotg \alpha_1 (0 - \sigma_1) + \cotg \alpha_2 (\sigma_2 - \sigma_1) + \cotg \alpha_3 (\sigma_2 - \sigma_3) + \cotg \alpha_4 (\sigma_4 - \sigma_3) + \cotg \alpha_5 (\sigma_4 - \sigma_5) + \cotg \alpha_6 (\sigma_6 - \sigma_5) + \cotg \alpha_7 (\sigma_6 - \sigma_7) + \cotg \alpha_8 (0 - \sigma_7)$$

*Рѣшение.* Данную формулу легко получить, если опредѣлить по уравн. (2) (№ 40 — выпускъ VI) измѣненія угловъ треугольника, изъ которыхъ складается величина  $ab$ , и ихъ сложить. Умноженіе на  $\cotg$  проще всего произвести графически. Можно было бы также написать выраженіе по порядку напряженій

$\sigma$ . Вліяніе  $\sigma_2$  на  $w_b$  будетъ тогда выражаться количествомъ  $= \sigma_2 \frac{s_2}{r_2}$ , гдѣ  $s_2$  — длина стержня 2, а  $r_2$  — величина перпендикуляра, опущеннаго изъ  $b$  на  $w_b$ . Какъ выразить проще всего вліяніе напряженія стержня, выходящаго изъ  $b$ , напирѣзь вліяніе  $\sigma_3$ ?

**Задача 4.** Требуется найти линію прогибовъ (въ направленіи  $r$ ) шарнирнаго многоугольника, для котораго величины  $\Delta s$  и  $\Delta \vartheta$  заданы; нѣкоторые стержни имѣютъ направленіе  $r$ .

<sup>\*</sup>) Для большей наглядности введены также напряженія  $\sigma$  стержней 8 и 11.

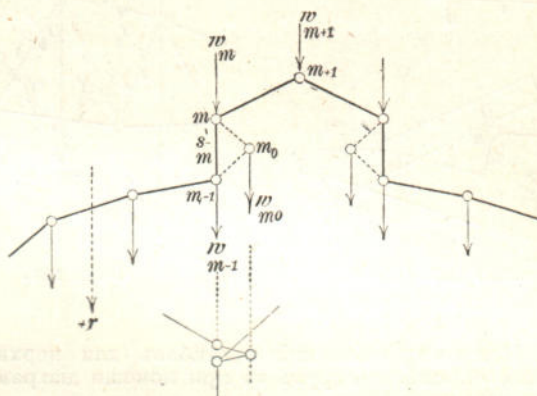


**Примечіе.** Если  $s_m$  совпадает съ направлениемъ  $r$ , то придется прибавить новый узелъ  $m_0$  и соединить его съ  $m-1$  и  $m$  жесткими стержнями, фиг. 122, которые образуютъ съ  $s_m$  уголъ въ  $45^\circ$ ; грузъ, приложенный къ этому узлу, будетъ  $w_{m_0} = -2 \frac{\Delta s_m}{s_m}$ . Для количествъ  $w_{m-1}$  и  $w_m$  получаемъ:

$$w_{m-1} = \Delta \vartheta_{m-1} + \frac{\Delta s_m}{s_m}$$

$$w_m = \Delta \vartheta_m + \frac{\Delta s_m}{s_m}.$$

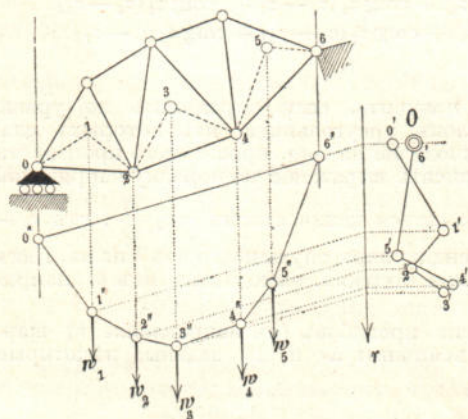
Если  $\Delta s_m$  положительно, то количество  $w_{m_0}$  надо принять въ направлении ( $-r$ ). На фиг. 122 предположено, что стержень  $s_m$  сжать. Надо замѣтить, что грузы должны соединяться веревочнымъ многоугольникомъ въ такомъ порядкѣ  $w_{m-1}$ ,  $w_{m_0}$ ,  $w_m$ , какъ это показано на фиг. 122.



Фиг. 122.

**Задача 5.** Требуется построить диаграмму перемещений для нижнего пояса  $0-2-4-6$  фермы, фиг. 123, с помощью вспомогательного шарнирного многоугольника  $0-1-2-3-4-5-6$ , состоящего из жестких частей.

Рухання заключається в тому, що спочатка строятъ по № 52 лінію прогибовъ въ напрямленні  $r$ , перпендикулярному къ пути перемѣщенія подвиж-



Фиг. 123.

ной опоры, потому что тогда точно же дается замыкающая  $o'' 6''$ . После этого определяется по № 51 ломанная линия  $6' 5' 4' 3' 2' 1' 0'$ . Лучи  $0 0', 0 2', 0 4'$ , представят по величинам, направлению и течению перемещения точек  $0, 2, 4$ . — Изъ трехъ способовъ, примѣненныхъ для подобныхъ фермъ (ср. фиг. 38 — выпускъ VI и фиг. 105, 123), первый способъ вообще проще другихъ. Рѣшеніе для фиг. 105 имѣетъ тогда преимущество, когда вертикальные перемѣненія  $\delta$  должны быть определены расчетомъ; наконецъ, послѣдній способъ (фиг. 123) примѣняется тогда, когда измѣненія угловъ намъ нужны и для другой цѣли (напр. для опредѣленія дополнительныхъ напряженій).

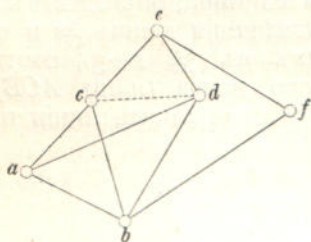
**Задача 6.** Построимъ такую рѣшетку: къ треугольнику  $abc$ , фиг. 124.

состоящему из 3 стержней присоединены два новых, которые образуют новый узел  $d$ ; затем к двум произвольным узлам полученной решетки прибавим опять два стержня, образующие новый узел  $e$  и т. д. Требуется вычислить изменения углов такой решетки.

Рѣшеніе основывается на уравненіи

$$\Delta s_1 = h\Delta\alpha_1 + \Delta s_2 \cos \alpha_2 + \Delta s_3 \cos \alpha_3.$$

которое представлять частный случай формулы, выведенной в № 44 (выпуск VI) для количества  $\Delta l$  и посредством которой определяется изменение длины стороны  $s$ , треугольника (фиг. 125), когда изменения противолежащего угла и двух других сторон треугольника будут известны.



Фиг. 124



Фиг. 125.

Если напр., имѣемъ рѣшетку, фиг. 124, то сначала вычисляютъ по способу, указанному въ № 40 (выпускъ VI), измѣненія угловъ треугольниковъ  $acb$  и  $adb$ , а затѣмъ выражаютъ измѣненіе разстоянія  $cd$  посредствомъ измѣненій длины  $\Delta ac$  и  $\Delta ad$  сторонъ  $ac$  и  $ad$  и посредствомъ измѣненій угловъ  $\Delta (cad) = \Delta (cab) - \Delta (dab)$ . Потомъ опредѣляютъ измѣненія угловъ треугольниковъ  $acd$ ,  $cdb$  и  $cde$ , выражаютъ  $\Delta \overline{eb}$  посредствомъ  $\Delta \overline{ce}$ ,  $\Delta \overline{cb}$  и  $\Delta (ecb)$ , и т. д.

Подобнымъ путемъ можно вычислить, напр., всѣ измѣненія угловъ для рѣшетокъ, показанныхъ на фиг. 49 и 50 (выпускъ VI). Легко видѣть, что при помощи формулы для  $\Delta s$ , и посредствомъ общихъ изслѣдованій, произведенныхъ въ № 37 и 38 (выпускъ VI), можно распространить способы построений, данные въ §§ 2 и 3, и на другіе подобные случаи, какъ это было сдѣлано со способомъ Виллио, примѣненнымъ первоначально только къ очень простымъ случаямъ.

§ 4.

Линіи вліянія и числа вліянія для упругихъ перемѣщеній.

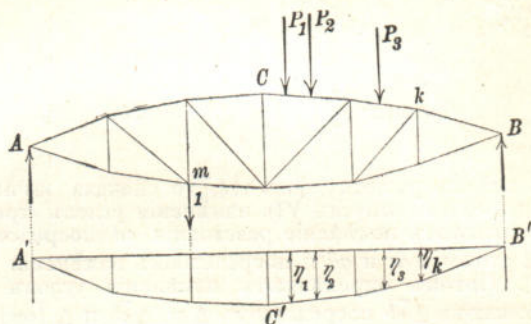
**53.**—При помощи изслѣдованій, произведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы имѣемъ возможность опредѣлить деформации статически опредѣлимой рѣшетки, находящейся подъ дѣйствіемъ какой нибудь нагрузки. Но эти изслѣдованія требуютъ еще дополненій для того случая, когда необходимо *отдѣльно* указать вліяніе грузовъ  $P_1, P_2, \dots$ , приложенныхъ къ рѣшеткѣ, на какую нибудь изъ величинъ, опредѣляющихъ деформацию, напр., отыскать предѣльныя значенія этихъ величинъ (для этихъ величинъ, конечно,



долженъ примѣняться законъ сложения отдѣльныхъ дѣйствій). Эту задачу можно было бы и такъ рѣшить: сначала нагрузить рѣшетку грузомъ  $P_1$ , потомъ только грузомъ  $P_2$ , и т. д., и для каждаго изъ этихъ случаевъ построить диаграмму перемѣщений; но этотъ способъ настолько сложенъ, что требуетъ иного рѣшенія. Въ данномъ случаѣ можно воспользоваться теоремой Максвелла о взаимности упругихъ деформаций (№ 16—выпускъ VI), примѣненіе которой покажемъ на слѣдующихъ двухъ примѣрахъ.

**Задача 1.** Требуется построить линію вліянія для прогиба  $\delta_m$  узла  $m$  рѣшетчатой фермы, нагруженной вертикальными грузами  $P$ .

Возьмемъ невѣсомую рѣшетку, на которую въ узлѣ  $m$  дѣйствуетъ одна вертикальная сила единица; опредѣлимъ происходящія при этомъ напряженія  $S$  и измѣненія длины  $\Delta s$  и построимъ (по одному изъ способовъ, данныхъ въ §§ 1—3), соотвѣтствующую этимъ  $\Delta s$  линію прогибовъ того пояса (напр.  $ACB$ ), на который должны дѣйствовать грузы  $P$ . Если ордината линіи прогибовъ для



Фиг. 126.

точки  $k$  равняется  $\eta_k$ , то это значитъ, что грузъ единица, приложенный къ узлу  $m$ , перемѣститъ узелъ  $k$  въ вертикальномъ направленіи на величину  $\eta_k$ , а отсюда, по теоремѣ Максвелла, грузъ единица, приложенный къ узлу  $k$ , перемѣститъ узелъ  $m$  также на величину  $\eta_k$ . А изъ этого слѣдуетъ, что построенная линія прогибовъ будетъ линіей вліянія для количества  $\delta_m$ .

Грузы  $P_1, P_2, P_3$ , которымъ соотвѣтствуютъ ординаты  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , вызовутъ напр. въ узлѣ  $m$  прогибъ

$$\delta_m = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3.$$

**Примѣръ.** На фиг. 113 (листъ чертежей 2 bis) нанесены вертикальныя перемѣшенія узловъ трехшарнирной арочной фермы для того случая, когда на средній шарниръ дѣйствуетъ грузъ  $1 \text{ т.} = 1000 \text{ к.}$  Линіи прогибовъ, полученные для нижняго и верхняго поясовъ, будутъ поэтому линіями вліянія для вертикальнаго перемѣщенія  $\delta$  средняго шарнира; съ помощью первой линіи можно опредѣлить вліяніе грузовъ, дѣйствующихъ на нижній поясъ, а посредствомъ второй—вліяніе нагрузки верхняго пояса. Если временная нагрузка, дѣйствующая по верху, равна  $p = 0,665 \text{ т. на пог. метръ}$  и  $p\lambda = 0,665 \cdot 3,0 = 2 \text{ т. на узелъ}$ , то для полной нагрузки (пренебрегая небольшими отрицательными отрезками по концамъ фермъ) получимъ:

$$\delta_{\max} = p\lambda [2,00 + 2(1,10 + 0,52 + 0,21 + 0,04)] = 11,5 \text{ мм.}$$

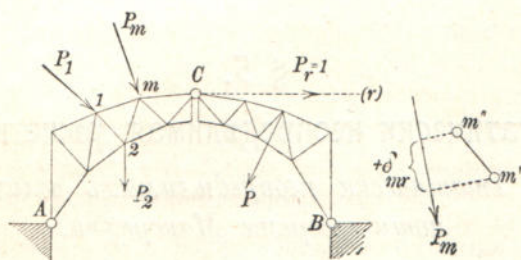


Изъ постоянной нагрузки  $g\lambda = 0,37 \cdot 3,0 = 1,11$  т. на одну панель можемъ считать  $g_u\lambda = 0,27$  (всѣ половины панели главной фермы) приложенной къ нижнему поясу, а другую часть  $g_v\lambda = 0,84$  т. къ верхнему поясу. Тогда прогибъ отъ постоянной нагрузки будетъ равняться:

$$\delta_g = g_u\lambda [2,00 + 2(1,09 + 0,52 + 0,22 + 0,07)] + \\ + g_v\lambda \left[ 2,00 + 2(1,10 + 0,52 + 0,21 + 0,04 - \frac{0,03^*}{2}) \right] = 5,00 \text{ мм.}$$

**Задача 2.** Пусть рѣшетка нагружена произвольно направленными силами  $P_1, P_2, \dots$ . Требуется отыскать проекцію  $\delta_r$  перемѣщения узла  $C$  на неподвижное направление  $r$ . Вліяніе каждаго груза  $P$  должно быть дано отдѣльно.

Строимъ діаграмму перемѣщений для того случая, когда на рѣшетку, фиг. 127, дѣйствуетъ только одинъ грузъ  $P_r = 1$ , приложенный къ узлу  $C$  и имѣющій направление  $r$ . Пусть для какого нибудь узла  $m$  эта діаграмма дасть перемѣщеніе  $m''m'$ , проекцію котораго на направление  $P_m$  можно обозначить черезъ  $\pm \delta_{mr}^{**}$ ), причемъ знакъ выбирается верхній или нижній, смотря по тому, совпадаетъ ли теченіе проекціи съ теченіемъ  $P_m$  или прямо противоположно ему.



Фиг. 127.

По теоремѣ же Максвелла искомое перемѣщеніе  $\delta_{mr}$ , которое получаетъ точка  $C$  въ направленіи  $r$  отъ дѣйствія силы  $P_m = 1$ , равно уже построенному перемѣщенію  $\delta_{mr}$ , которое получаетъ точка  $m$  въ направленіи  $P_m$  отъ дѣйствія силы  $P_r = 1$ , а отсюда слѣдуетъ, что вліяніе  $P_m$  на перемѣщеніе  $\delta_r$  равно  $P_m \delta_{mr}$ . Подобнымъ же образомъ найдемъ вліяніе грузовъ  $P_1, P_2, \dots$ , такъ что окончательно получимъ:

$$\delta_r = P_1 \delta_{1r} + P_2 \delta_{2r} + \dots + P_m \delta_{mr} + \dots$$

Количества  $\delta_{1r}, \delta_{2r}$  назовемъ краткости ради, *числами вліянія*, соответствующими отдѣльнымъ грузамъ  $P_1, P_2, \dots$ ; всѣ эти количества получаютъ изъ діаграммы перемѣщений, построенной для состоянія  $P_r = 1$ .

\*) Нагрузка узловъ по концамъ фермы равняется  $\frac{1}{2} g_0 \lambda$ .

\*\*) Согласно обозначеніемъ, принятымъ въ № 16 (выпускъ VI).



**54.**—Способъ, примѣненный въ предыдущихъ примѣрахъ, есть общій способъ и годится также въ тѣхъ случаяхъ, если подъ  $\delta$  и подъ  $P$  подразумѣваются не только перемѣщенія и отдѣльные грузы, а также тѣ понятія „путь нагрузки“ и „нагрузка“, которыя были объяснены въ № 16 (выпускъ VI). Написанное выраженіе

$$\delta_r = \delta_{ra} P_a + \delta_{rb} P_b + \dots + \delta_{rm} P_m + \dots$$

при помощи теоремы Максвелла всегда возможно преобразовать въ слѣдующее:

$$\delta_r = \delta_{ar} P_a + \delta_{br} P_b + \dots + \delta_{mr} P_m + \dots$$

и тогда числа вліянія  $\delta_{ar}, \delta_{br}, \dots, \delta_{mr}, \dots$  беремъ изъ диаграммы перемѣщений, построенной для состоянія нагрузки  $P_r = 1$  (вмѣсто диаграммы перемѣщений можетъ часто служить линия прогибовъ). Надо замѣтить еще, что эти правила примѣнимы также и къ статически неопредѣлимымъ рѣшеткамъ.

## § 5.

### Статически неопредѣлимая рѣшетка.

*а. Вычисленіе статически неопредѣлимыхъ величинъ при помощи теоремы Максвелла.*

**55.**—Въ введеніи было указано, что расчетъ статически неопредѣлимой рѣшетки сводится къ рѣшенію двухъ задачъ. Первая изъ нихъ заключается въ опредѣленіи напряженій въ стержняхъ и опорныхъ сопротивленій посредствомъ условій равновѣсія между данными грузами  $P$  и данными статически неопредѣлимыми величинами  $X$ ; вторая задача заключается въ томъ, чтобъ вычислить величины  $X$  при помощи уравненій, которыя найдутся, если подчинить извѣстнымъ условіямъ деформацію статически опредѣлимой рѣшетки, получаемой при уничтоженіи всѣхъ величинъ  $X$ . Найти надлежащій путь въ большинствѣ случаевъ легко, какъ это покажутъ нижеслѣдующія задачи, при рѣшеніи которыхъ мы будемъ пользоваться общими изслѣдованіями, описанными во введеніи, сначала только теоремой Максвелла, а въ остальномъ будемъ основываться исключительно на выводахъ §§ 1—3. Дѣйствительно, мы покажемъ, что расчетъ заданной статически неопредѣлимой рѣшетки будетъ очень легкой задачей для тѣхъ, кто знакомъ съ построеніемъ деформаций и съ теоремой Максвелла \*). Въ дальнѣйшемъ

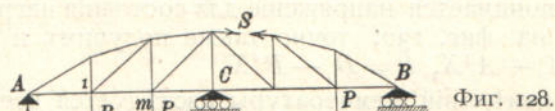
\*) Изслѣдованіе рѣшетокъ, впервые проектируемыхъ, становится сложнѣе, такъ какъ статически неопредѣлимые величины зависятъ отъ предварительно неизвѣстныхъ поперечныхъ сѣченій стержней. Вообще же принимаютъ сначала для поперечныхъ сѣченій нѣкоторыя величины, затѣмъ опредѣляютъ  $S$  и  $X$ ,



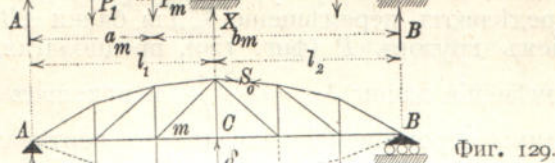
изложеніи мы покажемъ также примѣненіе и другихъ способовъ, описанныхъ во введеніи.

**56. Изслѣдованіе двухпролетной балки АСВ, фиг. 128,** на которую дѣйствуютъ вертикальные грузы  $P$ .

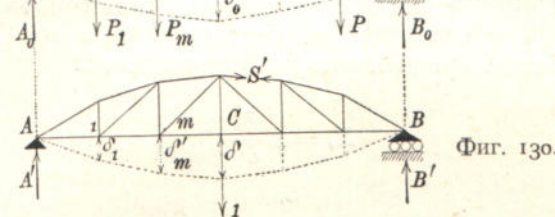
Способъ расчета будетъ заключаться въ слѣдующемъ. Если сопротивление средней опоры  $X$  было бы извѣстно, то мы легко могли бы опредѣлить сопротивления опоръ  $A$  и  $B$ , а также всѣ напряженія  $S$  стержней рѣшетки, состоящей изъ ряда треугольниковъ.



Фиг. 128.



Фиг. 129.



Фиг. 130.

Примемъ сначала, что  $X=0$ , тогда получимъ простую балку  $AB$ , для которой сопротивления опоръ будутъ:

$$A_0 = \frac{\sum P b}{l_1 + l_2} \text{ и } B_0 = \frac{\sum P a}{l_1 + l_2}, \text{ и напряженія для которой легко найдутся,}$$

напр., при помощи діаграммы Кремоны. Эта простая балка получитъ въ точкѣ  $C$  вертикальный прогибъ  $\delta_0$ , величину котораго можно опредѣлить по одному изъ способовъ, указанныхъ въ §§ 1—3. (Пусть пунктирный многоугольникъ на фиг. 129 означаетъ линію прогибовъ для пояса  $ACB$ ). Устранимъ теперь силы  $P$  и приложимъ къ простой балкѣ  $AB$  въ точкѣ  $C$  только одну силу  $X$ , направленную *кверху*, тогда точка  $C$  *подыметъ* кверху въ вертикальномъ направленіи на величину  $\delta'X$ , причемъ  $\delta'$  означаетъ то *пониженіе*, опредѣляемое при помощи второй діаграммы перемѣщеній, которое получаетъ точка  $C$ , когда на простую балку  $AB$  будетъ дѣйствовать въ точкѣ  $C$  грузъ равный единицѣ и направленный по вертикали *внизъ*. Если опоры заданной на фиг. 128 фермы будутъ совершенно жесткими, то вертикальное перемѣщеніе точки  $C$  должно равняться нулю, а отсюда получаемъ условіе:  $\delta_0 - \delta'X = 0$ , изъ котораго имѣемъ

$$X = 1 \frac{\delta_0}{\delta'}.$$

находить требуемыя сѣченія и въ случаѣ большой разницы между принятыми и вычисленными величинами поперечныхъ сѣченій повторяютъ весь способъ. Упрощеніе здѣсь получается отъ того остоятельства, что вліяніе нагрузки на величины  $X$  зависитъ только отъ взаимныхъ отношеній поперечныхъ сѣченій. Ср. также № 74.



Если при сжимаемыхъ опорахъ точка  $C$  перемѣстилась бы въ вертикальномъ направленіи относительно неподвижной прямой  $AB$  внизъ на величину  $\delta_w$ , то величину  $X$  надо вычислить изъ уравненія  $\delta_0 - \delta'X = \delta_w$ . По опредѣленіи величины  $X$  напряженія  $S$  въ стержняхъ балки  $ACB$  найдутся посредствомъ формулы

$$S = S_0 - S'X,$$

гдѣ подъ  $S'$  понимается напряженіе для состоянія нагрузки  $X = -1$ , показаннаго на фиг. 130; точно также получимъ и сопротивленія опоръ:  $A = A_0 - A'X$ ,  $B = B_0 - B'X$ .

Вліяніе измѣненій температуры изслѣдуется всегда отдѣльно; для этого опредѣляютъ перемѣщеніе  $\delta_0$  для балки  $AB$ , находящейся подъ дѣйствіемъ грузовъ  $P$  (фиг. 129), предполагая, что стержни получаютъ измѣненія длины  $\Delta s_0 = \frac{S_0 s}{EF}$ , и наконецъ при помощи третьей діаграммы перемѣщеній находятъ то вертикальное перемѣщеніе  $\delta_n$ , которое испытываетъ точка  $C$  простой балки  $AB$ , когда длина стержней измѣняется на величину  $\Delta s_m = \epsilon ts$ . Соотвѣтствующее сопротивленіе средней опоры будетъ тогда:

$$X_i = 1 \frac{\delta_i}{\delta'_i};$$

это сопротивленіе вызываетъ въ фермѣ  $ACB$  (фиг. 128) напряженія:  $S_i = -S'X_i$ . Въ случаѣ равномернаго нагрѣванія всѣхъ стержней  $\delta_i = 0$ , если только три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежатъ на одной и той же горизонтальной прямой.

Такимъ образомъ наша задача разрѣшена. Но къ этому рѣшенію надо добавить еще одну подробность, которая заключается въ необходимости каждый разъ опредѣленія  $\delta_0$  для каждаго изслѣдуемаго случая нагрузки. Это затрудненіе легко устраняется примѣненіемъ теоремы Максуелля. Обозначимъ черезъ  $\delta'_m$  соотвѣтствующую узлу  $m$  ординату линіи прогибовъ, построенной для состоянія нагрузки  $X = -1$  (фиг. 130), тогда мы можемъ заключить, что грузъ единица, приложенный въ точкѣ  $C$  понизитъ точку  $m$  на величину  $\delta'_m$ , поэтому грузъ единица, приложенный къ узлу  $m$  на ту же величину  $\delta'_m$  понизитъ точку  $C$ , а грузъ  $P_m$  на пониженіе  $\delta_0$  окажетъ такое вліяніе:  $\delta_0 = P_m \delta'_m$ . Но отсюда слѣдуетъ, что

$$\delta_0 = P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 + \dots + P_m \delta'_m + \dots *),$$

а слѣдовательно вліяніе грузовъ  $P$  на величину  $X$  выразится формулой

$$X = \frac{1}{\delta'_i} [P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 + \dots + P_m \delta'_m + \dots] = \frac{1}{\delta'_i} \Sigma P_m \delta'_m.$$

\*) Ср. также стр. 44.



Отсюда выводимъ такое заключеніе:

Линія прогибовъ пояса, несущаго грузы, построенная для состоянія нагрузки  $X = -1$ , будетъ линіей вліянія для количества  $X$ . Множитель этой линіи равенъ  $1/\rho'$ .

**57. Изслѣдованіе рѣшетчатой арки съ опорными шарнирами, но безъ средняго шарнира, фиг. 131.** Пусть на ферму дѣйствуютъ произвольно направленные грузы  $P$ . Разложимъ сопротивления неподвижныхъ опорныхъ шарнировъ  $A$  и  $B$  на составляющія  $A$  и  $B$ , перпендикулярныя къ прямой  $AB$ , и на составляющія  $C$  и  $X$ , совпадающія съ прямой  $AB$ .

Если положить  $X = 0$ , т. е. предположить, что неподвижный опорный шарниръ замѣненъ подвижной опорой, имѣющей движеніе по прямой  $AB$ , то рѣшетка обратится (фиг. 132) въ статически опредѣлимую систему. Реакціи  $A_0, B_0, C_0$  и напряженія  $S_0$  въ этомъ случаѣ найдутся просто.

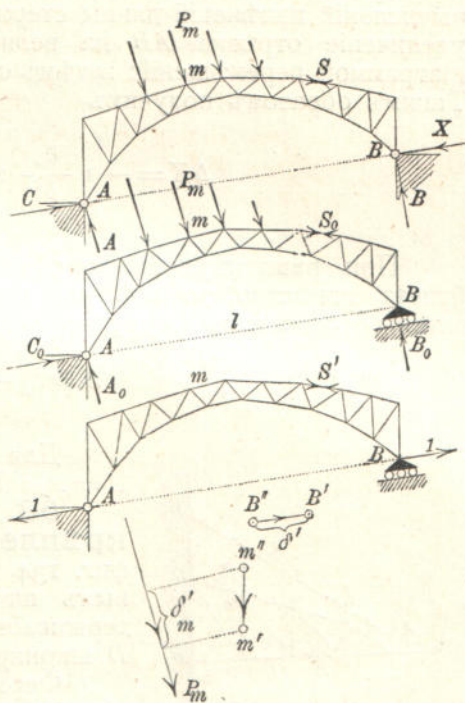
Для опредѣленія  $X$  требуется нагрузить полученную статически опредѣлимую рѣшетку силой  $X = -1$  (фиг. 133), которая вызоветъ напряженія  $S'$  и измѣненія длины стержней  $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$ ; затѣмъ для этого состоянія строимъ діаграмму перемѣненій.

Эта діаграмма доставитъ для точки  $B$  перемѣненіе  $B''B' = \delta'$  параллельное прямой  $AB$ , и для каковаго нибудь узла  $m$  перемѣненіе  $m''m'$ . Обозначимъ буквой  $\delta'_m$  проекцію отрезка  $m''m'$  на направленіе  $P_m$ , тогда увидимъ, что: сила 1, приложенная въ точкѣ  $B$  по направленію  $AB$ , перемѣщаетъ точку  $m$  по теченію  $P_m$  на величину  $\delta'_m$ , а поэтому грузъ  $P_m = 1$ , приложенный въ точкѣ  $m$  увеличитъ пролѣтъ  $AB = l$  на величину  $\delta'_m$ , грузъ же равный  $P_m$  произведетъ удлиненіе  $P_m \delta'_m$ . Но такъ какъ сила  $X$ , направленная отъ  $B$  къ  $A$  укорачиваетъ длину  $AB$  на  $X\delta'$ , то полное удлиненіе  $l$  будетъ равняться:

$$\Delta l = \Sigma P_m \delta'_m - X\delta'.$$

А отсюда въ примѣненіи къ рѣшетчатой аркѣ, фиг. 131, въ случаѣ неподвижныхъ опоръ (т. е. когда  $\Delta l = 0$ ), получимъ:

$$X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\delta'}.$$



Фиг. 131—133.



Если опоры сжимаемы, причем опора  $B$  перемещается относительно  $A$  на величину  $\delta_w$ , то количество  $X$  изменится на величину  $\Delta X$ , которая определяется уравнением

$$\delta_w = -\Delta X \delta'.$$

Влияние на количество  $X$ , изменения температуры найдется из вычислений изменений длины стержней  $\Delta s_i = \epsilon t s_i$ , которые обусловят увеличение отрезка  $AB$  на величину  $\delta_t$ , определяемой отдельной диаграммой перемещений; затѣмъ составляется условіе  $0 = \delta_t - X_i \delta'_i$ . Такимъ образомъ получимъ

$$\Delta X = -1 \frac{\delta_w}{\delta'_i} \text{ и } X_i = 1 \frac{\delta_t}{\delta'_i}.$$

При равномерномъ нагреваніи  $\delta_t = \epsilon t l$ . Когда количество  $X$  будетъ извѣстно, то всѣ напряжения  $S$  рѣшетчатой арки определяются посредствомъ формулы:

$$S = S_0 - S' X.$$

Для сопротивленій опоръ имѣемъ:  
 $A = A_0$ ;  $B = B_0$ ,  $C = C_0 + X$ .

**58. Стропильная ферма, закрѣпленная однимъ концомъ**, фиг. 134, имѣетъ два неподвижныхъ опорныхъ шарнира  $B$  и  $C$ , и кромѣ того поддерживается еще струной  $AD$ , имѣющей въ  $D$  шарниръ.

Ферму можно сдѣлать статически опредѣлимой, если удалить стержень  $AD$  (напряжение его обозначимъ черезъ  $X$ ). Опредѣляемъ для этого состоянія  $X=0$  напряжения  $S_0$  и затѣмъ строимъ диаграмму перемещений \*) для состоянія  $X=-1$ , изображенного на фиг. 136, которому пусть соответствуютъ напряжения  $S'$ . Пусть перемѣщеніе точки  $A$  изобразится полюснымъ лучемъ  $OA'$ , а перемѣщеніе точки  $m$  — лучемъ  $Om'$ . Проекція  $OA'$  на направленіе  $AD$  пусть будетъ  $\delta'$  (положительное направленіе принято по теченію силы 1, фиг. 136), а проекція  $Om'$  на  $P_m$  пусть будетъ  $\delta'_m$  (положительное направленіе по теченію силы  $P_m$ ). Тогда, какъ и въ предыдущей задачѣ, при посредствѣ теоремы Максвелла найдемъ равенство:

$$\Delta l = \Sigma P_m \delta'_m - X \delta',$$

Фиг. 134—136.

\*) Напр. по способу, описанному въ № 32 (выпускъ VI).

гдѣ  $l$  означаетъ длину стержня  $AD$ . Если поперечное сѣченіе этого стержня  $F_1$  и коэффициентъ упругости  $E_1$ , то удлиненіе этого стержня вызываемое напряженіемъ  $X$  равняется:

$$\Delta l = \frac{Xl}{E_1 F_1};$$

для количества  $X$  получимъ окончательно значеніе

$$X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\delta' + \frac{l}{E_1 F_1}}$$

Если требуется знать еще вліяніе измѣненія температуры, то при помощи второй діаграммы перемѣщеній опредѣляемъ взаимное перемѣщеніе  $\delta_t$  пары точекъ  $A, D$ , вызываемое измѣненіями  $\Delta s = \epsilon t s$ , и составляемъ условіе:

$$\Delta l = \delta_t - X_t \delta',$$

въ которое вмѣсто  $\Delta l$  надо подставить значеніе

$$\Delta l = \frac{X_t l}{E_1 F_1} + \epsilon_1 t_1 l,$$

гдѣ  $\epsilon_1$  и  $t_1$  означаютъ коэффициентъ расширенія и измѣненіе температуры для стержня  $AD$ . Такимъ образомъ получимъ:

$$X_t = \frac{\delta_t - \epsilon_1 t_1 l}{\delta' + \frac{l}{E_1 F_1}}.$$

**59. Изслѣдованіе трехпролетной стропильной фермы,** фиг. 137. Въ точкѣ  $A$  находится неподвижный опорный шарниръ, въ точкѣ  $B$  подвижной опорный шарниръ съ горизонтальнымъ движеніемъ. Колонны  $CD$  и  $EF$  имѣютъ шарниры вверху и внизу (такъ называемыя качающіяся колонны). За статически неопредѣлимые величины примемъ сопротивленія колоннъ  $X_a$  и  $X_b$ , направленныя по вертикали; точки приложенія ихъ обозначимъ по порядку буквами  $a$  и  $b$  \*).

Состояніе  $X_a = 0$ ,  $X_b = 0$  (которое будемъ называть короче состояніемъ  $X = 0$ ) показано на фиг. 138; состоянія  $X_a = -1$  и  $X_b = -1$  представлены на фиг. 139 и 140. Во всѣхъ трехъ случаяхъ имѣемъ дѣло съ простой рѣшетчатой балкой  $AB$ ; сопротив-

\*) Мы оставляемъ здѣсь то же обозначеніе, что и во введеніи.



ления опоръ и напряженія ( $S_0$ ,  $S_a$ ,  $S_b$ ) опредѣляются очень просто. Затѣмъ, когда это сдѣлано, вычисляютъ измѣненія длины, происходящія отъ напряженій  $S_a$  и  $S_b$  и отъ измѣненій температуры  $t$ :

$$\Delta s_a = \frac{S_a s}{EF}, \quad \Delta s_b = \frac{S_b s}{EF}, \quad \Delta s_t = \varepsilon t s,$$

и наконецъ опредѣляютъ перемѣщенія узловъ, зависящія отъ этихъ измѣненій  $\Delta s$ .

Первая изъ этихъ диаграммъ доставить:

$$\begin{array}{llllll} \delta_{ma} = \text{перемѣщ. точки } m \text{ по направл. } P_m & *) & \text{отъ причины } X_a = -1 \\ \delta_{aa} = & " & " & a & " & " & X_a = -1 & **) & " & X_a = -1 \\ \delta_{ba} = & " & " & b & " & " & X_b = -1 & & " & X_a = -1 \end{array}$$

Вторая диаграмма доставить:

$$\begin{array}{llllll} \delta_{mb} = \text{перемѣщ. точки } m \text{ по направл. } P_m & & \text{отъ причины } X_b = -1 \\ \delta_{ab} = & " & " & a & " & " & X_a = -1 & & " & X_b = -1 \\ \delta_{bb} = & " & " & b & " & " & X_b = -1 & & " & X_b = -1 \end{array}$$

Наконецъ третья диаграмма доставить:

$$\begin{array}{llllll} \delta_{mt} = \text{перемѣщеніе точки } m \text{ по направленію } P_m & & \text{отъ причины } t \\ \delta_{at} = & " & " & a & " & " & X_a = -1 & & " & t \\ \delta_{bt} = & " & " & b & " & " & X_b = -1 & & " & t \end{array}$$

(По теоремѣ Максвелла имѣемъ условіе  $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ , которымъ можно воспользоваться, чтобъ провѣрить пригодность чертежа).

Уравненія для вычисленія  $X$  получаются слѣдующимъ путемъ.

Нагрузки  $P_m$ ,  $X_a$ ,  $X_b$  вмѣстѣ съ измѣненіями температуры  $t$  и нѣкоторыми другими причинами (напр. движеніями опоръ  $A$  и  $B$ ) перемѣщаютъ точки  $a$  и  $b$  въ направленіи силъ  $X_a = -1$  и  $X_b = -1$  на отрѣзки  $\delta_a$  и  $\delta_b$ , которые представляются линейными функціями величинъ  $P$ ,  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $t$  \*\*\*); ихъ можно выразить въ формѣ:

$$\begin{aligned} \delta_a &= \Sigma P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b &= \Sigma P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw}, \end{aligned}$$

гдѣ величины  $\delta_{aw}$  и  $\delta_{bw}$  указываютъ на вліяніе упомянутыхъ „другихъ причинъ“. Значенія коэффиціентовъ  $X$  были объяснены раньше

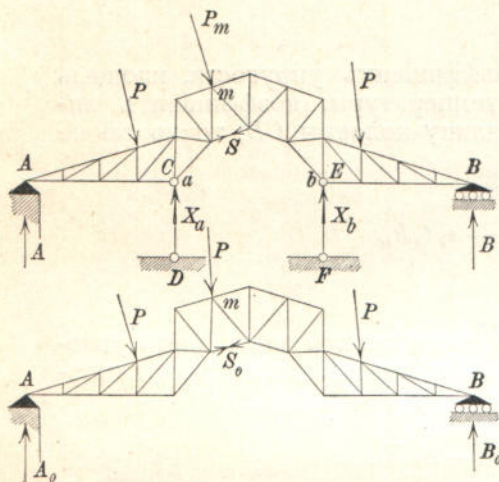
\*) Сокращенное выраженіе вмѣсто такого:  $\delta_{ma}$  = проекція перемѣщенія точки  $m$  на направленіе  $P_m$ , положительное теченіе по  $P_m$ . Надо замѣтить, что вторая буква двойного указателя при  $\delta$  всегда указываетъ на причину перемѣщенія, эта буква одинакова съ указателемъ нагрузки  $X$ .

\*\*) Это перемѣщеніе считается положительнымъ по теченію груза  $t$ , приложеннаго въ точкѣ  $a$  (фиг. 139).

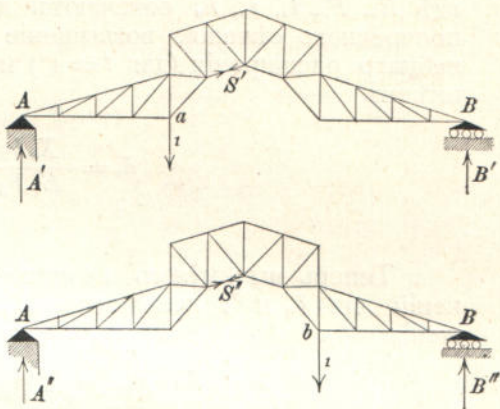
\*\*\*) Это свойство было объяснено во введеніи (выпускъ VI); впрочемъ его легко вывести изъ изслѣдованій §§ 1—3, потому что между проекціями перемѣщеній  $\delta$  на неподвижныя направленія и величинами  $\Delta s$ , а также между величинами  $\Delta s$  и грузами существуетъ зависимость первой степени.



(напр.  $\delta_{aa}$  есть то значеніе, принимаемое величиной  $\delta_a$ , когда существуетъ только причина  $X_a = -1$ , точно также величины  $\delta_{am}$  и  $\delta_{bm}$  представляютъ влияние на  $\delta_a$  и  $\delta_b$  причины  $P_m = 1$ .



Фиг. 137 и 138.



Фиг. 139 и 140.

По теоремѣ Максвелля перемѣщеніе  $\delta_{am}$ , которое получаетъ точка по направлению  $X_a = -1$  отъ причины  $P_m = 1$ , равно перемѣщенію  $\delta_{ma}$  точки  $m$  по направлению  $P_m$  при дѣйствіи причины  $X_a = -1$ ; подобнымъ же образомъ получаемъ, что  $\delta_{bm} = \delta_{mb}$ , такъ что предыдущія уравненія преобразуются въ слѣдующія:

$$\begin{aligned}\delta_a &= \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b &= \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw}.\end{aligned}$$

Количества  $\delta$ , стоящія въ правой части равенствъ, за исключеніемъ  $\delta_{aw}$  и  $\delta_{bw}$  получаютъ изъ трехъ предыдущихъ діаграммъ перемѣщеній; вмѣсто количествъ  $\delta_a$  и  $\delta_b$  надо ввести вертикальныя перемѣщенія опорныхъ точекъ  $a$  и  $b$ .

Предположимъ опоры  $A$  и  $B$  жесткими, и затѣмъ примемъ, что постороннія причины, которыя вызываютъ члены  $\delta_{aw}$ ,  $\delta_{bw}$ , не существуютъ, т. е.  $\delta_{aw} = 0$ ,  $\delta_{bw} = 0$ . Кромѣ того можемъ пренебречь сжиманіемъ фундамента колоннъ и грунта подъ ними, т. е. положимъ, что  $\delta_a$  равно укороченію колонны  $CD$ , сжимаемой силой  $X_a$ , уменьшенному на удлиненіе колонны отъ возвышенія температуры \*).

\*) Надо строго слѣдить, чтобъ при изслѣдованіи влияния движенія опоръ на члены  $\delta_{aw}$  и  $\delta_{bw}$  принимались во вниманіе только опоры статически опредѣлимой фермы (въ данномъ примѣрѣ простой балки  $AB$ ); количества  $X_a$  и  $X_b$  суть извѣстные грузы, которые кромѣ силъ  $P$  дѣйствуютъ на эту статически опредѣлимую ферму. Движенія лишннихъ опорныхъ точекъ ( $C$  и  $D$ ) принимаются во вниманіе при составленіи условій, которымъ окончательно подчиняются перемѣщенія  $\delta_a$  и  $\delta_b$ . Кромѣ этихъ причинъ, вызывающихъ появленіе дополни-



Мы получимъ:

$$\delta_a = \frac{X_a h_a}{E_a F_a} = \varepsilon_a t_a h_a,$$

гдѣ  $E_a$ ,  $F_a$ ,  $t_a$ ,  $\varepsilon_a$ ,  $h_a$  означаютъ коэффициентъ упругости, площадь поперечнаго сѣченія, возвышеніе температуры, коэффициентъ линейнаго расширенія (для  $t=1^\circ$ ) и длину колонны  $CD$ ; точно также имѣемъ:

$$\delta_b = \frac{X_b h_b}{E_b F_b} = \varepsilon_b t_b h_b.$$

Теперь мы имѣемъ возможность вычислить изъ обоихъ уравненій для  $\delta_a$  и  $\delta_b$  количества  $X_a$ ,  $X_b$  и опредѣлить затѣмъ напряженія:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b.$$

**60. Задачи для упражненія.** Способъ, описанный въ предыдущихъ примѣрахъ, можно примѣнить къ каждой статически неопредѣлимой рѣшеткѣ, если только эта рѣшетка при устраненіи лишнихъ стержней или лишнихъ опорныхъ сопротивленій обращается въ статически опредѣлимую. Если имѣется нѣсколько статически опредѣлимыхъ величинъ  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c \dots$ , то получимъ:

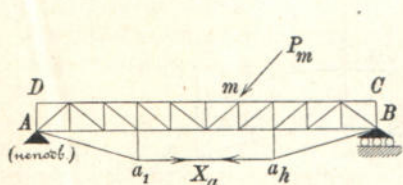
$$(I) \quad \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \dots + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \dots + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \dots + \delta_{ct} + \delta_{cw} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Коэффициенты  $\delta$  при количествахъ  $P$  и  $X$  опредѣляются изъ диаграммъ перемѣщеній для состояній нагрузокъ  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ ,  $X_c = -1 \dots$

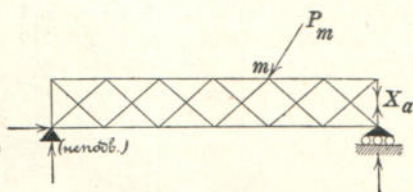
Величины  $\delta_{aw}$ ,  $\delta_{bw}$ ,  $\delta_{cw} \dots$  обыкновенно приравниваютъ нулю. Если же требуется принять во вниманіе эти величины, то надо приравнять (по № 19 — выпускъ VI)  $\delta_{aw} = -L_a$ ,  $\delta_{bw} = -L_b$ ,  $\dots$ , гдѣ  $L_a$  есть возможная работа сопротивленій опоръ статически опредѣлимой главной рѣшетки для состоянія нагрузки  $X_a = -1$ ,  $L_b$  — для состоянія нагрузки  $X_b = -1$ , и т. д. Количества  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$  подчинены извѣстнымъ условіямъ. Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность разрѣшить уравненія (I). Для полного уясненія этой теоріи

тельныхъ членовъ  $\delta_{aw}$  и  $\delta_{bw}$ , можно рассмотреть еще искусственное натяженіе и введеніе стержней неправильной длины; эти два случая сводятся къ рассмотрѣнію температуры  $t$  (по № 20 — выпускъ VI). Обыкновенно члены  $\delta_{aw}$  и  $\delta_{bw}$  выбрасываются, такъ какъ ихъ трудно оцѣнить. Ср. также конецъ № 11 (выпускъ VI).

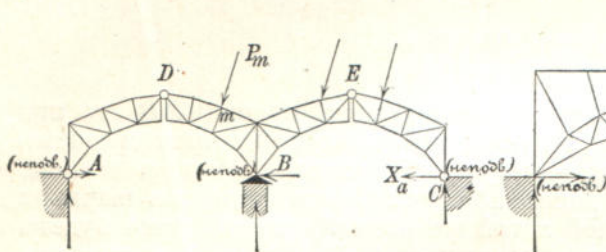
слѣдуетъ еще разъ продѣлать, пользуясь теоремой Максвелла, примѣръ, описанный во введеніи, и затѣмъ уже перейти къ различнымъ задачамъ, которыя предложены на фиг. 141—145. Какія величины выбрать за статически неопредѣлимые, указано на каждомъ чертежѣ.



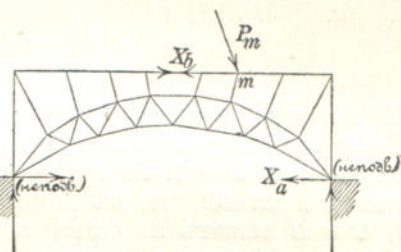
Фиг. 141.



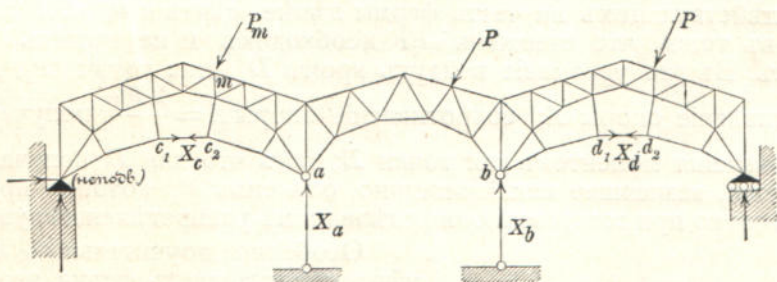
Фиг. 142.



Фиг. 143.



Фиг. 144.



Фиг. 145.

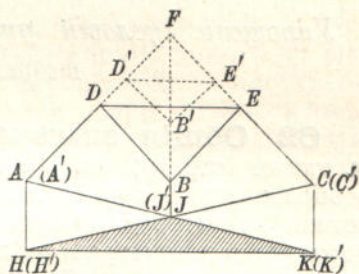
**61. О выборѣ величинъ  $X$ .** Обыкновенно не представляеть особахъ затрудненій найти тѣ напряженія и сопротивленія опоръ статически неопредѣлимой рѣшетки, которыя выбраны нами за статически неопредѣлимые величины, опредѣляемые изъ условий упругости. Раньше всего надо стремиться обратить данную рѣшетку путемъ устраненія лишняго стержня и лишняго опорнаго сопротивленія въ статически опредѣлимую, по возможности простую рѣшетку. Такъ напр., очевидно, что превращеніе въ № 57 двухшарнирной арки въ рѣшетку съ двумя шарнирами, однимъ неподвижнымъ, а другимъ подвижнымъ, будетъ цѣлесообразнѣе, чѣмъ превращеніе въ трехшарнирную арку путемъ устраненія одного стержня пояса, потому что построеніе деформаций для такой арки нѣсколько сложнѣе, чѣмъ для рѣшетки, изображенной на фиг. 132.





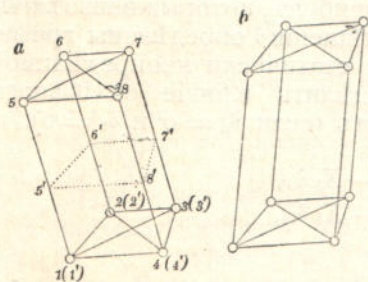


изъ котораго видимъ, что  $H$  вообще не можетъ быть приравнено нулю; и дѣйствительно, устраненіе горизонтальнаго сопротивленія опоры точки  $B$  приводитъ насъ къ рѣшеткѣ, имѣющей требуемое число стержней и сопротивленій опоръ, и въ то-же время подвижной; это можетъ быть точно и просто доказано при помощи изслѣдованій § 31 (1 томъ, выпускъ III). Съ этой цѣлью жесткія, части фермы I, II и III, форма которыхъ въ настоящемъ изслѣдованіи не играетъ роли, замѣнимъ болѣе простыми частями, а именно части I и II замѣнимъ стержнями, а часть III треугольникомъ (фиг. 148); затѣмъ соединимъ каждый неподвижный опорный шарниръ помощью *двухъ* стержней съ треугольникомъ  $HJK$ , представляющимъ совокупность всѣхъ опоръ, а подвижной шарниръ соединимъ съ этимъ треугольникомъ посредствомъ *одного* стержня, совпадающаго съ направлениемъ сопротивленія опоры  $B$ . Получимъ такимъ образомъ весьма ясную рѣшетку. Для этой системы строимъ фигуру ( $F'$ ), которая не будетъ подобна рѣшетчатой фигурѣ ( $F$ ), въ чемъ можно убѣдиться изъ простаго рассмотрѣнія чертежа (фиг. 148) \*); а это доказываетъ, что рѣшетка будетъ подвижной. Подвижность, при жесткихъ стержняхъ, будетъ во всякомъ случаѣ бесконечно мала, тѣмъ не менѣе ферма примѣненія имѣть не можетъ.

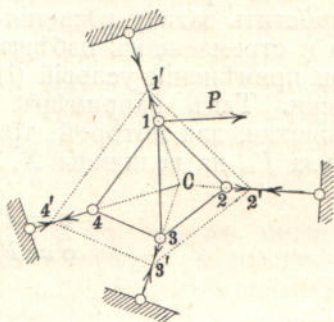


Фиг. 148.

Въ заключеніе надо замѣтить, что раньше выбора статически неопредѣлимыхъ величинъ  $X$ , требуется изслѣдовать вообще подвижность статически неопредѣлимой рѣшетки при помощи фигуры  $F'$ , такъ какъ иногда подвижность въ рѣшеткѣ можетъ существовать и до устраненія стержней или сопротивленій опоръ. Примѣры этому представляютъ фигуры 149 и 150. Первая фигура представляетъ



Фиг. 149.



Фиг. 150.

плоское сочлененіе съ конечной подвижностью, въ чемъ легко убѣдиться, такъ какъ сочлененіе изъ положенія  $a$  можетъ перейти въ положеніе  $b$ ; вторая фигура—плоская рѣшетка обладаетъ бесконечно малою подвижностью даже при жесткихъ стержняхъ; дѣйстви-

\*) Точки  $A'$ ,  $C'$ ,  $H'$ ,  $J'$ ,  $K'$  приняты совпадающими соотвѣтственно съ точками  $A$ ,  $C$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $K$ .



тельно, сочлененіе 1—2—3—4 можетъ вращаться вокругъ точки  $C$ , въ которой пересѣкаются оси стержней, прикрѣпленныхъ къ сочлененію, и будетъ вращаться до тѣхъ поръ, пока эти оси не будутъ больше пересѣкаться въ одной точкѣ, что имѣетъ мѣсто въ случаѣ безконечно малаго вращенія сочлененія. Относительно сочлененій съ безконечно малой подвижностью укажемъ на изслѣдованія во введеніи (№ 21 — выпускъ VI). Тамъ было сказано, что пренебрегать въ такихъ рѣшеткахъ измѣненіями длины стержней нельзя; кромѣ того было упомянуто, что примѣняться такія рѣшетки не могутъ.

*б. Упрощеніе условий упругости, выведенныхъ при помощи теоремы Максвелла.*

**62. Общіе замѣчанія.** Условія упругости I на стр. 54 (см. также стр. 35 въ № 19 — выпускъ VI) можно всегда такъ преобразовать, что въ каждое условіе войдетъ только одна неизвѣстная  $X$ , которую потомъ изъ этого уравненія можно и вычислить. Чтобъ этого достигнуть, мы должны такъ выбрать статически неопредѣлимые величины, чтобъ исчезли всѣ тѣ коэффициенты  $\delta$  при величинахъ  $X$ , которые имѣютъ указатель, состоящий изъ двухъ различныхъ буквъ, а именно:  $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ ,  $\delta_{ac} = \delta_{ca}$ ,  $\delta_{bc} = \delta_{cb}$ , и т. д.

Тогда получаются простыя уравненія:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - \delta_{at} - \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_b \delta_{bb} - \delta_{bt} - \delta_{bw} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Это преобразованіе обусловлено не только однимъ желаніемъ упростить задачу рѣшенія уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными, но и стремленіемъ избѣгать грубыхъ ошибокъ, которыя неизбѣжны при примѣненіи условій (I), когда перемѣщенія  $\delta$  опредѣлены графически. Такъ напримѣръ, для дважды статически неопредѣлимой рѣшетки, для которой требуется опредѣлить вліяніе отдѣльнаго груза  $P_m$  на величины  $X_a$  и  $X_b$ , получимъ (если  $\delta_a = 0$  и  $\delta_b = 0$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} \\ 0 &= P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb}, \end{aligned}$$

а отсюда

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{\delta_{ma} \delta_{bb} - \delta_{mb} \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}; \quad \frac{X_b}{P_m} = \frac{\delta_{mb} \delta_{aa} - \delta_{ma} \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

Такимъ образомъ, если члены, составляющіе данныя дроби, будутъ положительны, то дроби  $X:P$  представятся отношеніями разностей, а это можетъ даже при ничтожныхъ чертежныхъ ошибкахъ привести къ совершенно неправильнымъ результатамъ. Такъ, напр.,



если для числителя и знаменателя  $X_a : P_m$  возьмемъ значенія 151,87 — 149,12 = 2,75 и 223,81 — 220,58 = 3,23, вмѣсто точныхъ: 151,58 — 149,34 = 2,24 и 224,67 — 220,68 = 3,99, то получимъ

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{2,75}{3,23} = 0,85 \text{ вмѣсто } \frac{X_a}{P_m} = \frac{2,24}{3,99} = 0,56,$$

т. е. несмотря на незначительныя ошибки въ отдѣльныхъ числахъ, получилось значеніе для  $\frac{X_a}{P_m}$  на 52% больше. По изслѣдованіямъ автора уравненія (I) можно примѣнять для сложныхъ статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ только тогда, когда перемѣщенія  $\delta$  были опредѣлены путемъ вычисленій и при томъ съ точностью нѣсколькихъ десятичныхъ знаковъ, которые послѣ опредѣленія  $X$  могутъ быть отброшены. Большею частью приходится имѣть дѣло съ параллельными грузами, а въ этомъ случаѣ требуется только вычисленіе линіи прогибовъ по способу, описанному въ № 49.

Если же желаемъ примѣнить діаграммы перемѣщеній, то требуется превратить уравненія (I) въ уравн. (II), какъ это будетъ показано въ дальнѣйшемъ изложеніи. Мы увидимъ, что это превращеніе для рѣшетокъ низкихъ степеней статической неопредѣлимости (что почти всегда бываетъ на практикѣ) весьма просто. Чѣмъ больше число величинъ  $X$ , тѣмъ сложнѣе получить уравненія (II).

Замѣтимъ предварительно, что въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ подъ буквами  $X$  будемъ подразумѣвать или отдѣльныя силы, или моменты паръ силъ, дѣйствующихъ на жесткую часть. Въ первомъ случаѣ соотвѣтствующее  $\delta$  будетъ означать перемѣщеніе, во второмъ уголъ вращенія, выраженный въ мѣрахъ дуги. Такъ напр., если  $X_a$  будетъ отдѣльной силой, приложенной къ точкѣ  $a$ , то  $\delta_a$  представитъ проекцію перемѣщенія точки  $a$  на направленіе  $X_a$ . Если  $X_a$  представляетъ моментъ пары силъ, дѣйствующихъ на жесткую часть  $[a]$ , то  $\delta_a$  дастъ уголъ, на который повернется часть  $[a]$ . Положительное теченіе для  $\delta_a, \delta_b, \dots$  считается въ обратномъ направленіи теченій соотвѣтствующихъ величинъ  $X$ . Относительно другихъ обозначеній сошлемся на № 19 (выпускъ VI) (ср. также № 59). Если двѣ отдѣльныя силы  $X_r, X_s$  приложены къ одной и той же точкѣ, то для этихъ точекъ выберемъ букву  $r$  или  $s$ , смотря по тому, разсматриваемъ мы эту точку какъ точку приложенія силы  $X_r$  или  $X_s$ .

Наконецъ, обратимъ еще вниманіе на то, что въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ при неподвижныхъ опорахъ съ величинами  $\delta_{aw}, \delta_{bw}, \dots$  исчезнутъ и величины  $\delta_{aa}, \delta_{bb}, \dots$ , такъ что для вліянія грузовъ  $P$  на величины  $X$  получимъ формулы:

$$(III) \quad X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = \frac{\Sigma P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}}; \dots$$

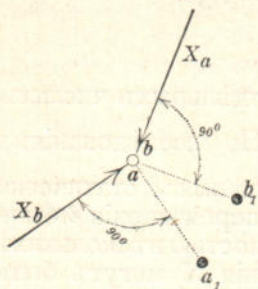
а для вліянія измѣненій температуры выраженія:

$$(IV) \quad X_{at} = t \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = t \frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}} \dots$$



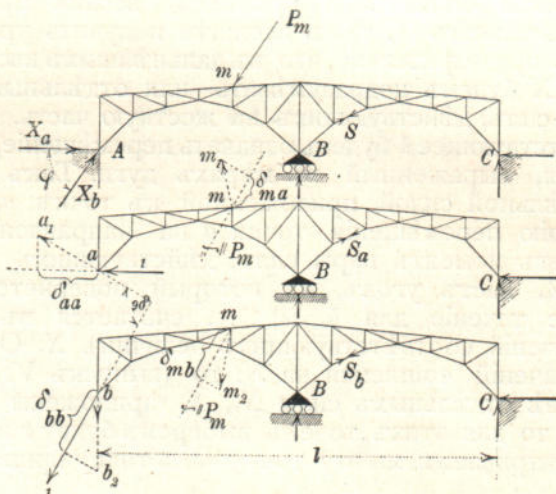
### 63. Дважды статически неопредѣлимая рѣшетка.

За статически неопредѣлимые величины въ этомъ случаѣ всегда можно принять силы  $X_a$  и  $X_b$ , приложенныя къ одной и той же точкѣ, фиг. 151. Уравненія II будутъ имѣть мѣсто только тогда, когда  $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$ . Чтобы получить это, надо взять для  $X_a$  произвольное направленіе, опредѣлить перемѣщеніе  $aa_1$ , получаемое точкой  $a$  отъ состоянія нагрузки  $X_a = -1$ , и затѣмъ для  $X_b$  принять направленіе, перпендикулярное къ  $aa_1$ . Тогда получится  $\delta_{ba} = 0$ , потому что величина  $\delta_{ba}$  означаетъ перемѣщеніе точки  $b$  по направленію  $X_b$ , когда дѣйствуетъ только причина  $X_a = -1$ . Если теперь построить диаграмму перемѣщеній для состоянія  $X_b = -1$ , то при тщательномъ построеніи получимъ для точки  $b$  перемѣщеніе  $bb_1$ , перпендикулярное къ  $X_a$ , потому что, если  $\delta_{ba} = 0$ , то и  $\delta_{ab} = 0$ , такъ какъ  $\delta_{ba} = \delta_{ab}$ .



Фиг. 151.

**1. Примѣръ.** Двухпролетная арочная ферма, изображенная на фиг. 152, имѣющая два неподвижныхъ опорныхъ шарнира  $A$  и  $C$  и одинъ подвижной —  $B$ , будетъ дважды статически неопредѣлима



Фиг. 152.

За статически неопредѣлимые величины  $X$  надо принять составляющія  $X_a$  и  $X_b$  сопротивленія опоры  $A$ , взятая по неподвижнымъ направленіямъ. При  $X_a = 0$  и  $X_b = 0$  ферма обращается въ статически опредѣлимую балку съ опорами  $B$  и  $C$  и съ консолью  $BA$ . Выбравъ произвольное направленіе для  $X_a$ , строимъ диаграмму перемѣщеній для состоянія  $X_a = -1$ , которая дастъ намъ для узла  $a$  перемѣщеніе  $aa_1$  и для какого нибудь другого узла  $m$  — перемѣщеніе  $mm_1$ . Затѣмъ выбираемъ для  $X_b$  направленіе, перпендикулярное къ  $aa_1$  и строимъ диаграмму перемѣщеній для состоянія  $X_b = -1$ , которая доставитъ для точки  $b$  перемѣщеніе  $bb_1$ , перпендикулярное къ  $X_a$ ,



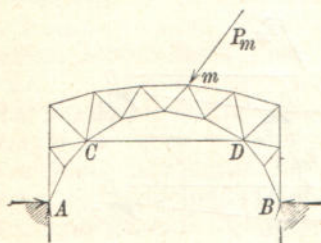
а для точки  $m$  перемѣщеніе  $mm_2$ . Опредѣливъ проекціи  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{bb}$ ,  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$  (изъ которыхъ  $\delta_{ma}$  отрицательно), нанесенныя на фиг. 152, мы получимъ вліяніе груза  $P_m$ .

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

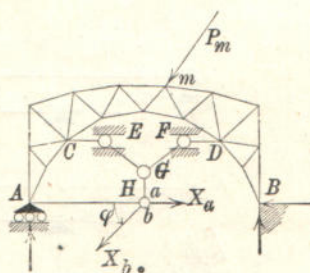
Если всѣ стержни будутъ претерпѣвать одинаковое измѣненіе температуры и если точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежатъ на прямой, параллельной перемѣщенію опоры  $B$ , то точка  $A$  балки  $ABC$  отъ вліянія температуры  $t$  получитъ горизонтальное перемѣщеніе  $\varepsilon tl$  (гдѣ  $l = AC$ ), проекція котораго на направленія  $X_a = -1$  и  $X_b = -1$  равны соотвѣтственно  $\delta_{at} = \varepsilon tl$  и  $\delta_{bt} = \varepsilon tl \cos \varphi$  (гдѣ  $\varphi$  означаетъ уголъ наклоненія  $X_b$  къ горизонту); поэтому получимъ:

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon tl}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1 \frac{\varepsilon tl \cos \varphi}{\delta_{bb}}.$$

**2. Примѣръ.** Рѣшетчатая арка, фиг. 153, имѣетъ двѣ неподвижныхъ опоры  $A$  и  $B$  и скрѣплена лишнимъ стержнемъ  $CD$ ; такая ферма будетъ дважды статически неопредѣлима. Мы превратимъ неподвижный шарниръ въ подвижной, вырѣжемъ изъ стержня  $CD$  часть его  $EF$ , заставимъ точки  $E$  и  $F$  перемѣщаться по прямой  $CD$ , прибавимъ жесткіе стержни  $EG$ ,  $FG$ ,  $GH$  и  $AH$  и приложимъ къ  $H$  двѣ силы  $X_a$  и  $X_b$ , которыя такъ подберемъ, чтобъ взаимное перемѣщеніе пары точекъ  $CD$  равнялось удлинению лишняго стержня и чтобъ перемѣщеніе точки  $A$  (при неподвижныхъ опорахъ) равнялось нулю. Тогда напряженія для фермъ на фиг. 153 и 154 будутъ



Фиг. 153.



Фиг. 154.

между собой одинаковы. Напряженіе стержня  $AH$  даетъ горизонтальное сопротивленіе неподвижнаго опорнаго шарнира  $A$ . Необходимо при этомъ сдѣлать такъ, чтобъ  $GH \perp CD$  и чтобъ  $\angle EGH = \angle FGH$ ; въ этомъ случаѣ стержни  $CE$  и  $FD$  получаютъ равныя напряженія; затѣмъ необходимо для стержней  $CE$  и  $FD$  принять поперечныя сѣченія  $F'$  и  $F''$  и измѣненія температуры  $t'$ ,  $t''$ , такъ чтобъ въ результатъ сумма измѣненій длины стержней  $CE$  и  $FD$  равнялась измѣненію длины лишняго стержня  $CD$ . Если этому



стержню будутъ соответствовать значенія  $F$ ,  $t$ , и если  $\overline{CD} = s$ ,  $\overline{CE} = s'$ ,  $\overline{ED} = s''$ , то должны имѣть:

$$\frac{s'}{F'} + \frac{s''}{F''} = \frac{s}{F} \text{ и } t' s' + t'' s'' = ts.$$

Затѣмъ кромѣ перемѣщенія точки  $A$  надо приравнять нулю взаимное перемѣщеніе пары точекъ  $EF$ , откуда получимъ  $\delta_a = 0$ ,  $\delta_b = 0$ . Для  $X_a$  выберемъ произвольное направленіе, а силу  $X_b$  проведемъ перпендикулярно къ перемѣщенію, которое получаетъ точка  $a$  отъ дѣйствія причины  $X_a = -1$ ; какъ и раньше получимъ уравненія:

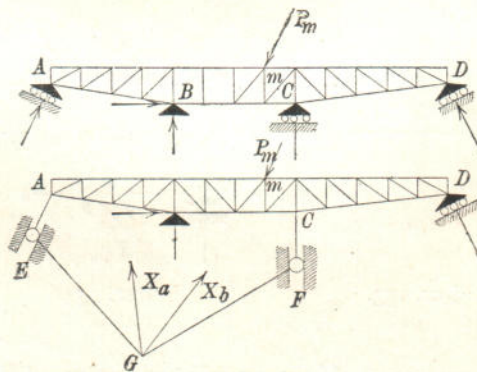
$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Примемъ затѣмъ для всѣхъ стержней одинаковое измѣненіе температуры  $t$  (за исключеніемъ стержней  $CE$  и  $FD$ , для которыхъ было принято  $t'$  и  $t''$ ), тогда найдемъ формулы, подобныя формуламъ предыдущаго примѣра:

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = -1 \frac{\varepsilon t l \cos \varphi}{\delta_{bb}}.$$

Знакъ минусъ здѣсь необходимъ, потому что  $X_b$  имѣетъ теперь стрѣлку по другому направленію.

**3. Примѣръ.** Ферма съ однимъ неподвижнымъ и тремя подвижными шарнирами, фиг. 155.



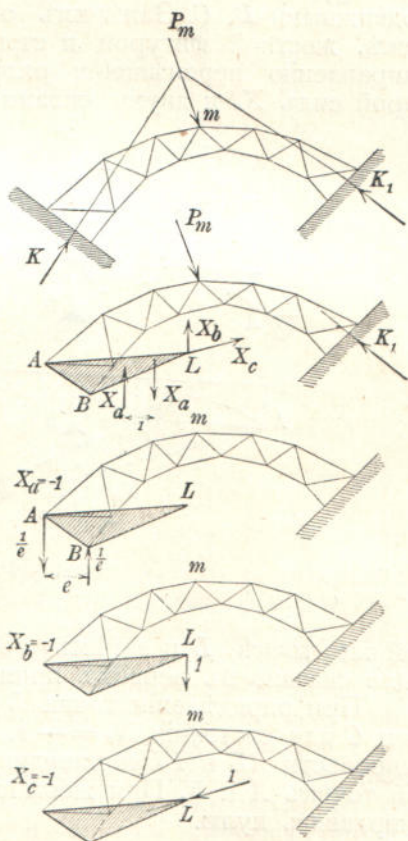
Фиг. 155.

Способъ разрѣшенія указанъ на чертежѣ. Стержни  $AE$  и  $CF$  имѣютъ направленіе перпендикулярное къ путямъ перемѣщенія опоръ  $A$  и  $C$ ; конечныя точки этихъ стержней  $E$  и  $F$  могутъ перемѣщаться по направленіямъ  $AE$  и  $CF$ .

**64. Трижды статически неопредѣлимая рѣшетка.** Къ статически опредѣлимой рѣшеткѣ, въ которую обратится статически неопредѣлимая при устраненіи лишнѣхъ стержней или сопротивленій опоръ, присоединимъ какимъ нибудь образомъ жесткую фигуру и приложимъ къ послѣдней пару силъ, моментъ которой  $= X_a$ , а также двѣ другія силы  $X_b$  и  $X_c$ , которыя дѣйствовали бы на одну и ту же точку ( $b, c$ ). Затѣмъ подберемъ для величинъ  $\delta_a$  (уголъ поворота жесткой фигуры),  $\delta_b$  (перемѣщеніе точки  $b$  по теченію  $X_b = -1$ ) и  $\delta_c$  (перемѣщеніе точки  $c$  по теченію  $X_c = -1$ ) такія значенія, чтобы силы, дѣйствующія на прибавленную жесткую фигуру, производили на статически опредѣлимую рѣшетку точно такое же дѣйствіе, какое производятъ устраненныя части. Если выбрать полюсъ, вокругъ котораго вращается жесткая фигура отъ причины  $X_a = -1$ , за точку приложенія силъ  $X_b$  и  $X_c$ , то достигнемъ того, что  $\delta_{ba} = 0$  и  $\delta_{ca} = 0$ , а потому при тщательномъ построеніи или вычисленіи мы должны получить, что углы вращенія жесткой фигуры  $\delta_{ab}$  и  $\delta_{ac}$ , получаемые отъ дѣйствія причинъ  $X_b = -1$  и  $X_c = -1$ , будутъ равняться также нулю. Наконецъ, при произвольно выбранномъ направленіи для  $X_b$  выберемъ для  $X_c$  направленіе, перпендикулярное къ перемѣщенію точки ( $b, c$ ), производимому причиной  $X_b = -1$ , тогда получимъ, что  $\delta_{cb} = 0$  и  $\delta_{bc} = -0$ , а слѣдовательно здѣсь можно примѣнить уравненія II.

**1. Примѣръ.** Имѣемъ, фиг. 156, рѣшетчатую арку съ задѣланными концами. Замѣнимъ лѣвую опору жесткой фигурой  $ABL$ , а опорное сопротивленіе  $K$ , предварительно неизвѣстное ни по величинѣ, ни по положенію, замѣнимъ парой силъ, моментъ которой  $X_a$ , и двумя силами  $X_b$  и  $X_c$ , дѣйствующими по постояннымъ направленіямъ.

Затѣмъ построимъ діаграмму перемѣщеній для состоянія нагрузки  $X_a = -1$ , приложивъ къ  $A$  и  $B$  двѣ равныя, но въ противоположномъ направленіи дѣйствующія параллельныя силы  $\frac{1}{e}$ , разстояніе между которыми  $e$ ; потомъ опредѣлимъ перемѣщенія  $AA_1$  и  $BB_1$  точекъ  $A$  и  $B$  и наконецъ выберемъ точку приложенія  $L$  силъ  $X_b$  и  $X_c$  такъ, чтобы  $LA \perp AA_1$  и  $LB \perp BB_1$ . Тогда  $L$  будетъ



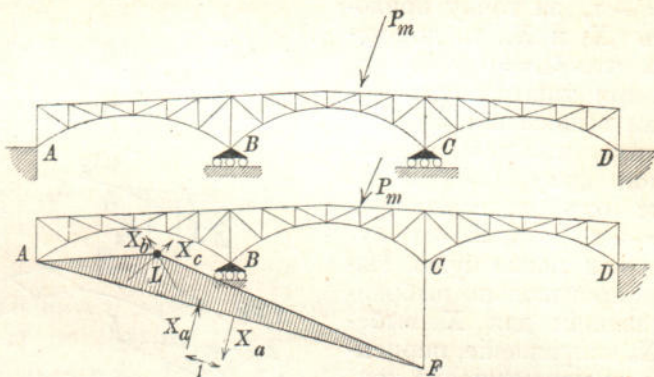
Фиг. 156.



центромъ вращенія фигуры для состоянія  $X_a = -1$ ; при этомъ получится  $\delta_{ba} = 0$ ,  $\delta_{ca} = 0$ , а вслѣдствіе этого также  $\delta_{ab} = 0$ ,  $\delta_{ac} = 0$ .

Направленіе для  $X_b$  выбирается произвольно, а направленіе для  $X_c$  — перпендикулярно къ перемѣщенію точки  $L$  отъ дѣйствія причины  $X_b = -1$ , для того чтобъ получить  $\delta_{cb} = \delta_{bc} = 0$ . Наконецъ, при жесткихъ опорахъ надо приравнять нулю величины  $\delta_a$ ,  $\delta_b$  и  $\delta_c$  и разрѣшить уравненія (II). Для опредѣленія вліянія  $P_m$  имѣютъ мѣсто уравненія III, а для опредѣленія вліянія  $t$  — уравненія IV, (стр. 59).

**2. Примѣръ.** Изслѣдуемъ трехпролетную арочную ферму, фиг. 157, съ 2-мя неподвижными опорными шарнирами  $A$ ,  $D$  и 2-мя подвижными  $B$ ,  $C$ . Замѣнимъ опоры  $A$  и  $C$ , какъ показано на чертежѣ, жесткой фигурой и стержнемъ  $CF$ , перпендикулярнымъ къ направленію перемѣщенія опоры  $C$ ; нагрузимъ жесткую фигуру парой силъ  $X_a$  и двумя силами  $X_b$ ,  $X_c$ , приложенными къ одной и



Фиг. 157.

той же точкѣ  $L$  и затѣмъ при рѣшеніи задачи поступаемъ, какъ было сказано въ первомъ примѣрѣ.

При опредѣленіи точки  $L$  слѣдуетъ найти перемѣщенія точекъ  $A$  и  $C$  для состоянія  $X_a = -1$ , затѣмъ найти перемѣщеніе точки  $F$  и провести  $AL$  и  $FL$  перпендикулярно къ направленіямъ перемѣщеній точекъ  $A$  и  $F$ . При жесткихъ опорахъ величины  $\delta_a$ ,  $\delta_b$  и  $\delta_c$  надо приравнять нулю.

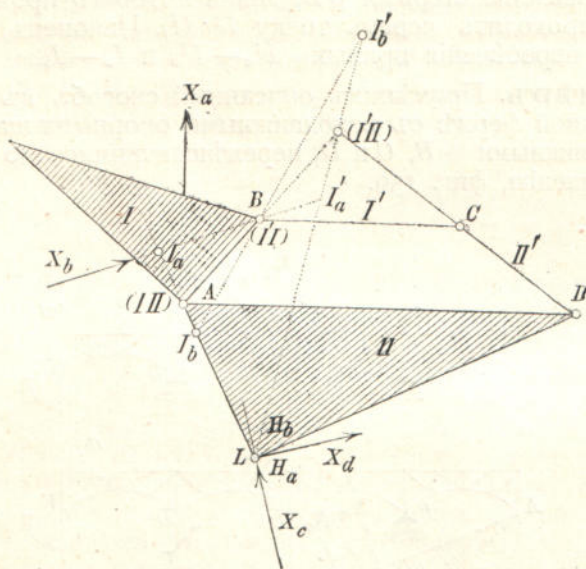
**65. Четырежды статически неопредѣлимая рѣшетка.** Приложимъ силы  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ ,  $X_d$  къ кинематической цѣпи, фиг. 158, образованной изъ двухъ жесткихъ фигуръ  $I$ ,  $II$  и двухъ жесткихъ стержней  $I'$ ,  $II'$ ; причѣмъ цѣпь эта должна быть такъ связана со статически опредѣлимой главной системой, чтобъ напряжения  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ ,  $S_d$ , вызываемыя причинами  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ ,  $X_c = -1$ ,  $X_d = -1$ , получили единственные возможные значенія, опредѣляемыя по возможности простымъ путемъ изъ условий равновѣсія. При этомъ фигура  $I$  должна быть нагружена силами  $X_a$  и  $X_b$  \*), а фигура  $II$  — силами  $X_c$  и  $X_d$ . Общее расположеніе надо такъ

\*) Сила  $X_a$  можетъ быть замѣнена также парой силъ.



выбрать, чтобъ состоянія нагрузки  $X_a = -1$  и  $X_b = -1$  можно было вполне установить, не зная положенія фигуры II.

Положеніе  $X_a$  можетъ быть выбрано произвольно;  $X_b$  должно пройти черезъ полюсъ  $I_a$ , вокругъ котораго вращается фигура I отъ состоянія нагрузки  $X_a = -1$ . Тогда получимъ:  $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$ .



Фиг. 158.

Опредѣливъ перемѣщенія отъ причины  $X_b = -1$ , которыя для фигуры I могъ бы доставить полюсъ  $I_b$ , придадимъ фигурѣ II такое положеніе, чтобъ получилось совпаденіе полюсовъ  $II_a$  и  $II_b$ , вокругъ которыхъ вращается фигура II при состояніяхъ нагрузки  $X_a = -1$  и  $X_b = -1$ ; этотъ то общій полюсъ (на фиг. 158 онъ обозначенъ буквой L) и выберемъ за точку приложенія силъ  $X_c$  и  $X_d$ . Тогда получимъ  $\delta_{ca} = 0$ ,  $\delta_{cb} = 0$ ,  $\delta_{da} = 0$ ,  $\delta_{db} = 0$ , а вслѣдствіе этого и  $\delta_{ac} = 0$ ,  $\delta_{bc} = 0$ ,  $\delta_{ad} = 0$ ,  $\delta_{bd} = 0$ . Наконецъ, при произвольномъ выборѣ направленія  $X_c$  надо силу  $X_d$  направить по перпендикуляру къ перемѣщенію точки L отъ дѣйствія причины  $X_c = -1$ , тогда получимъ  $\delta_{dc} = \delta_{cd} = 0$ . Такимъ путемъ достигается примѣнимость уравненій II.

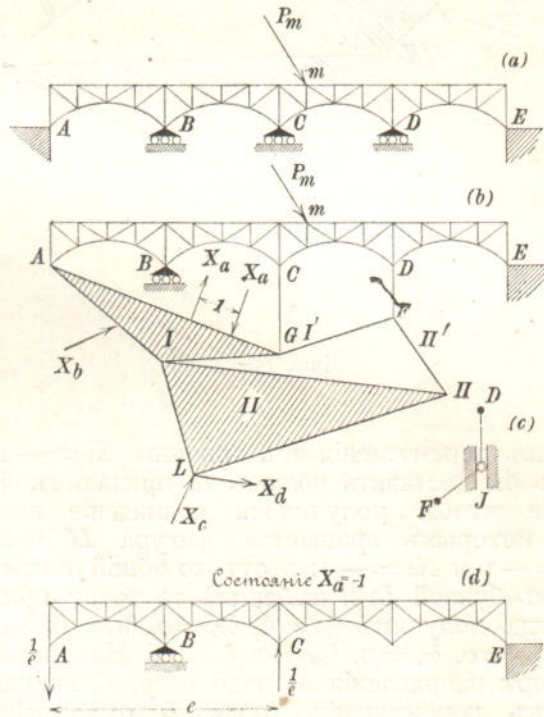
Положеніе точки L опредѣляется скорѣе всего при помощи теоремы о трехъ полюсахъ, выведенной на стр. 34, № 136 (I томъ — III выпускъ). Полюсъ (I' II) фигуры I относительно стержня I' и полюсъ (I' II) стержня I' относительно фигуры II совпадаютъ первый съ шарниромъ B, второй съ точкой пересѣченія AB и CD, а полюсъ (I II) совпадаетъ съ точкой A. Прямая, проходящая черезъ  $I_a$  и (I' II) и затѣмъ черезъ  $I_b$  и (I' I'), будутъ соответственно геометрическими мѣстами полюсовъ  $I_a'$  и  $I_b'$ , вокругъ которыхъ вращается стержень I' отъ причинъ  $X_a = -1$  и соответственно  $X_b = -1$ , и которые будутъ лежать съ полюсомъ (I' II) на одной и той же прямой. Но такъ какъ три полюса (I II),  $I_a$ ,  $II_a$  должны



лежать на одной прямой, точно также и полюсы ( $I \cdot II$ ),  $I_b$ ,  $II_b$ , то отсюда получается слѣдующій способъ опредѣленія искомой цѣни.

Беремъ ( $I \cdot II$ ) на прямой  $I_a - I_b$ , положеніе стержня  $BC$  выбираемъ произвольно, опредѣляемъ полюсы  $I'_a$  и  $I'_b$ , вокругъ которыхъ вращается  $I'$  отъ причинъ  $X_a = -1$  и  $X_b = -1$ , проводимъ прямую  $I'_a - I'_b$  и  $AB$  до пересѣченія въ точкѣ ( $I' \cdot II$ ) и проводимъ затѣмъ направленіе стержня  $CD$ , длина котораго произвольна (направленіе проходить черезъ точку  $I' \cdot II$ ). Наконецъ, находимъ  $L$  какъ точку пересѣченія прямыхъ  $I'_a - I'_b$  и  $I_a - I_b$ .

**Примѣръ.** Примѣнимъ описанный способъ къ четырехпролетной арочной фермѣ съ неподвижными опорными шарнирами  $A$  и  $C$  и съ подвижными —  $B$ ,  $C$  и  $D$ , перемѣщающимися по горизонтальному направленію, фиг. 159.



Фиг. 159.

Къ фигурѣ  $I$  приложены пара силъ  $X_a$  и отдѣльная сила  $X_b$ . Приложение пары силъ  $X_a$  имѣетъ то преимущество, что напряженія  $S_a$  и измѣненія длины  $\Delta s_a$  для состоянія  $X_a = -1$  можно опредѣлить, не нуждаясь въ нахожденіи длины стержня  $CG$ , потому что какъ бы ни было велико  $CG$ , мы всегда прикладываемъ къ точкамъ  $A$  и  $C$  статически опредѣлимой главной системы двѣ силы  $\frac{1}{e}$  равныя, но разнаго направленія, которыя вызываются отъ дѣйствія фигуры  $I$  при состояніи нагрузки  $X_a = -1$ , причемъ  $e$  = горизонтальному разстоянію  $AC$ . Опредѣлимъ для этого состоянія нагрузки



перемѣщенія точекъ  $A$  и  $C$ , а затѣмъ при подходящемъ выборѣ точки  $G$  можемъ добиться удобнаго положенія полюса, вокругъ котораго вращается  $I$  и черезъ который тогда должна пройти сила  $X_b$ . Когда состояніе нагрузки  $X_a = -1$  разрѣшено, переходя къ изслѣдованію состоянія  $X_b = -1$ . При этомъ можно и не знать положеній стержней  $I'$  и  $II'$ ; ихъ выбираютъ потомъ такъ, чтобъ точка  $L$  (т. е. полюсъ  $II_a$ , а также одновременно и полюсъ  $II_b$ ) лежала благоприятно; причемъ надо замѣтить, что стержень  $DF$  можетъ быть замѣненъ двумя стержнями  $DJ$  и  $FJ$  фиг. 159<sup>е</sup>, общій шарниръ которыхъ  $J$  перемѣщается по вертикальному направленію. Наконецъ при жесткихъ опорахъ надо положить:

$$\delta_a = 0, \delta_b = 0, \delta_c = 0, \delta_d = 0.$$

**66. Фермы высшихъ степеней статической неопредѣлимости.** Если число статически неопредѣлимыхъ величинъ  $X$  больше, чѣмъ 4, то для изслѣдованія такой фермы можно примѣнить повторное рѣшеніе задачи, объясненной на фиг. 158: довести полюсы  $II_a$  и  $II_b$  до совпаденія. Чтобъ показать это на примѣрѣ, предположимъ, что арочная ферма на фиг. 159 продолжена вправо отъ  $E$  еще на нѣсколько пролетовъ, и примемъ, что всѣ среднія опоры будутъ подвижными въ горизонтальномъ направленіи, обѣ же крайнія опоры будутъ неподвижны. Устранимъ подвижныя опоры, а на ихъ мѣсто введемъ вертикальные стержни, къ которымъ должны присоединяться дальнѣйшіе жесткіе стержни и фигуры, подобно тому какъ это присоединялось къ стержнямъ  $CG$  и  $DF$ . Подобно тому какъ присоединена жесткая фигура  $II$  (на фиг. 159) къ стержню  $DF$  и къ жесткой фигурѣ  $I$ , причемъ фигура  $II$  отъ обоихъ состояній нагрузки  $X_a = -1$  и  $X_b = -1$  вращается около того же полюса  $L$ , такимъ же точно путемъ присоединимъ и дальнѣйшія жесткія фигуры  $III, IV, V$ , число которыхъ соответствуетъ числу пролетовъ фермы вправо отъ  $E$ ; всѣ эти жесткія фигуры должны быть такъ связаны съ фигурой  $I$  и съ каждымъ вертикальнымъ стержнемъ, исходящимъ изъ устраненной опоры, чтобъ каждой фигурѣ для обоихъ состояній нагрузки  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$  соответствовать одинъ и тотъ же полюсъ вращенія, а именно, чтобъ  $III_a$  совпало съ  $III_b$  въ точкѣ  $M$ ,  $IV_a$  съ  $IV_b$  въ точкѣ  $N$  и т. д. Тогда всѣ стержни и жесткія фигуры, примыкающія къ точкамъ  $L, M, N, \dots$ , при обоихъ состояніяхъ нагрузки остаются въ покоѣ, а отсюда можно заключить, что при дѣйствіи на эти части силъ  $X_e, X_f, X_g, \dots$  получается рядъ равенствъ:  $\delta_{ea} = \delta_{ae} = 0, \delta_{fa} = \delta_{af} = 0, \dots \delta_{eb} = \delta_{be} = 0, \delta_{fb} = \delta_{bf} = 0, \dots$  Положимъ, что имѣемъ дѣло съ фермой пять разъ статически неопредѣлимой, т. е. когда вправо отъ  $E$  на фиг. 159 прибавленъ еще одинъ пролетъ. Тогда придется разсмотрѣть только жесткія фигуры  $II$  и  $III$ ; прибавимъ части  $LT$  и  $TM$ , подвѣшенныя къ шарниру  $T$ , опредѣлимъ полюсы  $S_e$  и  $S_d$ , вокругъ которыхъ вращается жесткая часть  $S = TM$  отъ дѣйствія причины  $X_e = -1$  и соответственно  $X_d = -1$ , и приложимъ къ  $S$  силу  $X_e$ , совпадающую съ прямой  $S_e S_d$ . Тогда получимъ  $\delta_{ee} = \delta_{ee} = 0$  и  $\delta_{ed} = \delta_{de} = 0$  и будемъ имѣть возможность примѣнить уравненія (5), потому что всѣ количества  $\delta$ , которыя входятъ въ связи съ количествами  $X$  въ уравненія 4 и



указатель которых состоитъ изъ двухъ неодинаковыхъ буквъ, исчезнуть.

Если бы ферма была шесть разъ статически неопредѣлима, то къ частямъ II, III, IV слѣдовало бы какимъ нибудь образомъ присоединить часть  $S'$ , но такъ, чтобъ полюсы  $S'_c$  и  $S'_d$  совпадали; затѣмъ этотъ общій полюсъ можно выбрать за точку приложенія двухъ отдѣльныхъ силъ  $X_c$  и  $X_d$ , причемъ направленіе  $X_d$  должно быть перпендикулярно къ направленію перемѣщенія точки приложенія этой силы отъ причины  $X_c = -1$ .

Возможность, въ случаѣ еще высшей степени статической неопредѣлимости, присоединять части  $S''$ ,  $S'''$ , . . . такъ, чтобъ происходило совпаденіе полюсовъ  $S''_c$  съ  $S''_d$  и  $S'''_c$  съ  $S'''_d$ , даетъ намъ средство къ опредѣленному развитію нашего способа; потому что всѣ стержни и жесткія фигуры, примыкающіе къ общему полюсу, остаются въ покоѣ не только при состояніяхъ нагрузки  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ , но и во время состояній нагрузки  $X_c = -1$  и  $X_d = -1$ .

Авторъ считаетъ впрочемъ, что для рѣшетокъ высшихъ степеней статической неопредѣлимости способъ расчета, примѣненный къ задачамъ въ №№ 67 до 70, будетъ безусловно плѣсообразнѣе; на этомъ основаніи авторъ, изъ всѣхъ различныхъ возможныхъ способовъ указать примѣнимость уравненій II путемъ кинематическихъ изслѣдованій, привелъ только одинъ.

### с) Примѣненіе условий упругости.

$$(V) \begin{cases} X' \Sigma S'^2 \rho + X'' \Sigma S' S'' \rho + X''' \Sigma S' S''' \rho + \dots = \Sigma P_m \delta'_m + \Sigma S' \epsilon ts - L' \\ X' \Sigma S'' S' \rho + X'' \Sigma S''^2 \rho + X''' \Sigma S'' S''' \rho + \dots = \Sigma P_m \delta''_m + \Sigma S'' \epsilon ts - L'' \\ X' \Sigma S''' S' \rho + X'' \Sigma S''' S'' \rho + X''' \Sigma S'''^2 \rho + \dots = \Sigma P_m \delta'''_m + \Sigma S''' \epsilon ts - L''' \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

При этомъ предполагается, что всѣ напряжения  $S$  и сопротивленія опоръ (по неподвижнымъ направленіямъ) статически опредѣлимой рѣсетки представлены формулами такого вида:

$$S = S_0 - S' X' - S'' X'' - S''' X''' - \dots$$

$$C = C_0 - C' X' - C'' X'' - C''' X''' - \dots$$

гдѣ  $X'$ ,  $X''$ ,  $X'''$  означаютъ статически неопредѣлимые величины \*).

Количества  $\delta'_m$ ,  $\delta''_m$ , . . . суть перемѣщенія точки приложенія  $m$  груза  $P_m$ , когда на рѣсетку дѣйствуетъ соответственно или только причина  $X' = -1$ , или только причина  $X'' = -1$ , и т. д.;  $L'$ ,  $L''$ , . . . означаютъ возможные работы опорныхъ сопротивленій  $C'$ ,  $C''$ , . . . Въ предыдущихъ уравненіяхъ всѣ выраженія суммъ, зависящія отъ величинъ  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$ , простираются на всѣ стержни рѣсетки, какъ необходимыя, такъ и лишніе. Количество  $\rho$  равняется:

$$\rho = \frac{s}{EF}.$$

\*) Ср. № 13 (выпускъ VI).



Большую частью принимаютъ, что опоры несжимаемы, тогда возможная работы  $L=0$ .

Примѣнять предыдущія уравненія слѣдуетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда количества  $X'$ ,  $X''$  . . . должны быть опредѣлены путемъ вычислений; а это вообще бываетъ тогда, когда нельзя опредѣлить каждую изъ величинъ  $X$  изъ одного только уравненія (о чемъ было уже упомянуто на стр. 58). Обыкновенно мы разсматриваемъ вертикальные грузы; тогда величины  $\delta_m'$ ,  $\delta_m''$ ,  $\delta_m'''$ , . . . будутъ ординатами *линии прогибовъ*, вычисленіе которой (по № 49) всегда можно свести на опредѣленіе изгибающихъ моментовъ для простой балки. Но также легко опредѣлить путемъ вычисленій вліяніе наклонныхъ, непараллельныхъ силъ  $P$ ; дѣлается это на основаніи способа, приведеннаго въ концѣ № 51; причемъ сначала требуется построить линіи прогибовъ для какого-нибудь направленія, соотвѣтствующія состояніямъ нагрузки  $X'=-1$ ,  $X''=-1$ , . . . Если мы въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ принимать во вниманіе только вертикальные грузы, то дѣлаемъ это ради краткости изложенія. Ср. также № 75.

**67. Изслѣдованіе трехпролетной арочной фермы,** фиг. 160, со средними шарнирами въ боковыхъ пролетахъ, съ неподвижными опорными шарнирами и со скользящими опорами надъ средними быками.

Ферма статически неопредѣлима; за статически неопредѣлимую величину удобнѣе всего принять горизонтальный распоръ  $X$ . Напряженія  $S$  должны представиться въ такой формѣ:

$$S = S_0 - S'X.$$

Положимъ  $X=0$ , тогда получимъ не арку, а балку Гербера, напряженія для которой  $S_0$  опредѣляются легко.  $S'$  означаетъ ту величину, которую принимаетъ количество  $S$ , когда дѣйствуетъ только причина  $X=-1$ . Это состояніе нагрузки показано на фиг. 161. Въ точкахъ  $A$  и  $B$  дѣйствуютъ горизонтальныя силы 1, направленныя внаружу; кромѣ того, чтобъ части арки  $AE$  и  $BF$  не вращались вокругъ шарнировъ  $E$  и  $F$ , необходимо приложить вертикальныя силы  $\frac{2h}{l_1}$ , направленныя внизъ. Эти послѣднія силы обусловливаютъ появленіе въ  $C$  и  $D$  сопротивленій опоръ, равныхъ по величинѣ и направленныхъ кверху.

Сначала опредѣлимъ напряженія  $S'$  для всѣхъ стержней (напр. съ помощью діаграммы Кремоны), а затѣмъ уже найдемъ  $X$  изъ условія равновѣсія

$$X \sum S'^2 \rho = \sum P_m' \delta'_m + \sum S' \epsilon t s - L'.$$

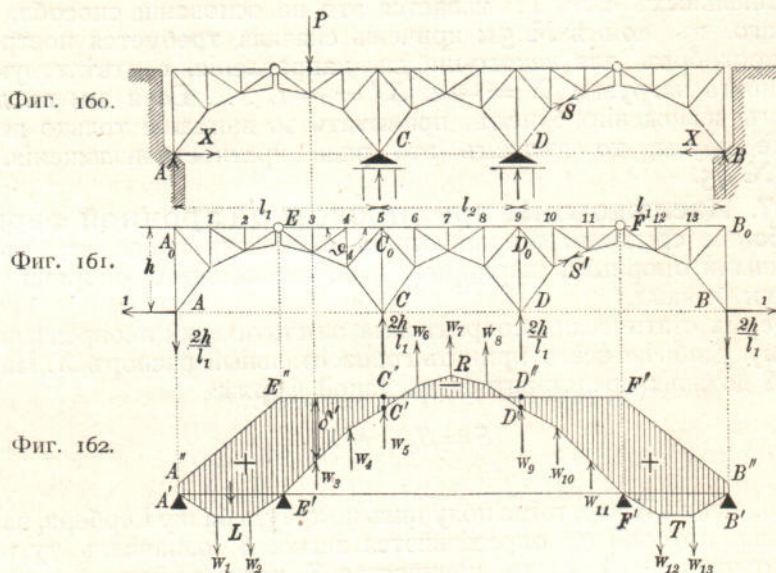
Лучше всего опредѣлить отдѣльно:

$$\begin{aligned} \text{вліяніе одного груза } P \dots X &= \frac{P \delta'}{\sum S'^2 \rho} \\ \text{измѣненія температ.: } X_i &= \frac{\sum S' \epsilon t s}{\sum S'^2 \rho} \\ \text{перемѣщеній опоръ } \Delta X &= - \frac{L'}{\sum S'^2 \rho}. \end{aligned}$$



Значенія  $X$ , и  $\Delta X$  могутъ быть найдены тотчасъ послѣ опредѣленія величинъ  $S'$ .  $L'$  — означаетъ возможную работу внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ опорнымъ точкамъ  $A, B, C, D$  для состоянія  $X = -1$ . Такъ напр., если требуется найти вліяніе увеличенія пролета  $AB$  на величину  $\Delta l$ , затѣмъ вліяніе пониженій точекъ  $C$  и  $D$  на величины  $\eta'$  и  $\eta''$ , то надо положить:

$$L' = 1 \cdot \Delta l - \frac{2h}{l_1} (\eta' + \eta''),$$



потому что горизонтальнымъ силамъ  $1$ , приложеннымъ къ точкамъ  $A$  и  $B$ , соответствуетъ положительная возможная работа  $1 \cdot \Delta l$ , а силамъ  $\frac{2h}{l_1}$ , направленнымъ вверхъ, соответствуетъ отрицательная работа  $(-\frac{2h}{l_1} \eta' - \frac{2h}{l_1} \eta'')$ .

Для опредѣленія  $X$  отъ дѣйствія груза  $P$  надо найти линію прогибовъ верхняго пояса для состоянія нагрузки  $X = -1$ , такъ какъ грузъ  $P$  приложенъ къ верхнему поясу. Примѣнимъ для даннаго примѣра способъ, описанный въ № 46 (стр. 7); для этого вычислимъ измѣненія  $\Delta'\vartheta$  угловъ  $\vartheta$ , зависящіе отъ напряженій  $\sigma' = \frac{S'}{F}$ , приложимъ къ узламъ  $1, 2, 3, \dots$  грузы  $w_1 = \Delta'\vartheta_1$ ,  $w_2 = \Delta'\vartheta_2$ ,  $w_3 = \Delta'\vartheta_3, \dots$  (такъ какъ верхній поясъ горизонталенъ, то въ уравн. (3), стр. 8, исчезнутъ члены, содержащіе  $\Delta s$ ), и затѣмъ поступаемъ согласно примѣру 3 на стр. 30. На фиг. 162 грузы  $w_1, w_2, w_{12}, w_{13}$  приняты положительными, остальные  $w$  — отрицательными.

Ломанныя линіи  $A'LE'$ ,  $E'C'RD'F'$  и  $F'TB'$  будутъ многоугольниками моментовъ для простыхъ балокъ  $A'E'$ ,  $E'F'$  и  $F'B'$ , которыя нагружены соответственно грузами  $w_1$  до  $w_2$ ,  $w_3$  до  $w_{11}$  и  $w_{12}$  до  $w_{13}$ . Ломанная замыкающая линія  $A''E''F''B''$  опредѣляется измѣненіями длины стоекъ  $AA_0$ ,  $CC_0$ ,  $DD_0$  и  $BB_0$ , а именно:

$$\overline{A''A'} = \Delta \overline{AA_0}; \quad \overline{C''C'} = \Delta \overline{CC_0}; \quad \overline{D''D'} = \Delta \overline{DD_0}; \quad \overline{B''B'} = \Delta \overline{BB_0}.$$

Эти стойки сжаты, поэтому точки  $A''$ ,  $C''$ ,  $D''$ ,  $B''$  лежатъ выше точекъ  $A'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $B'$  \*). Заштрихованная на фиг. 162 площадь будетъ искомою площадью прогибовъ и одновременно площадью вліянія для количества  $X$  (множитель ея  $1 : \Sigma S'^2 \rho$ ); средняя часть линіи вліянія будетъ отрицательна, поэтому грузы, приложенные между узлами 6—8, вызовутъ отрицательный горизонтальный распоръ.

Остается прибавить, что выраженіе для  $X$ , при предполагаемомъ обыкновенно равномерномъ нагруженіи арки подлежитъ упрощенію. Съ этой цѣлью вообразимъ, что арка имѣетъ опору  $B$ , подвижную въ горизонтальномъ направленіи; припишемъ затѣмъ всѣмъ стержнямъ длиной  $s$  весьма малое измѣненіе  $\Delta s = \omega s$ , причемъ  $\omega$  для всѣхъ стержней должно быть одно и то же, и примѣнимъ къ этому состоянію перемѣщеній и къ состоянію нагрузки  $X = -1$  законъ возможныхъ перемѣщеній. Такъ какъ  $l = l_2 + 2l_1$  измѣнится на  $\Delta l = \omega l$  то получимъ зависимость такого рода

$$1 \cdot \omega l = \Sigma S' \omega s, \text{ т. е. } \Sigma S' s = l,$$

и затѣмъ, такъ какъ кромѣ  $t$  и  $\varepsilon$  имѣетъ постоянное значеніе, найдемъ:

$$X_t = \frac{\varepsilon t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 \rho} = \frac{\varepsilon t l}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

**68. Цѣпь, усиленная балкой Гербера.** Обратимся къ изслѣдованіямъ, сдѣланнымъ въ 1 томѣ (№ 208 — выпускъ V), гдѣ доказано, что многопролетная цѣпь съ жесткой неразрѣзной балкой образуетъ статически опредѣлимую систему только тогда, когда въ жесткую балку введено столько среднихъ шарнировъ, сколько мостъ имѣетъ пролетовъ, причемъ эти средніе шарниры должны быть такъ распредѣлены, чтобъ по удаленіи одного изъ нихъ (назовемъ его краткости ради буквой  $G'$ ) жесткая балка обратилась въ балку Гербера \*\*). Мы показали также, что напряжения подвѣсокъ  $Z$  легко находятся послѣ опредѣленія горизонтальнаго натяженія цѣпи  $H$ , для чего пользуемся тѣмъ закономъ, что цѣпь будетъ веревочнымъ многоугольникомъ для силъ  $Z$ ; такимъ образомъ, всѣ силы, дѣйствующія на балку опредѣлены; наконецъ опре-

\*) Напомнимъ, что вертикальныя перемѣщенія *внизъ* считаются положительными.

\*\*) О распредѣленіи шарнировъ въ балкѣ Гербера объяснено въ отдѣлѣ VI перваго тома (выпускъ II).



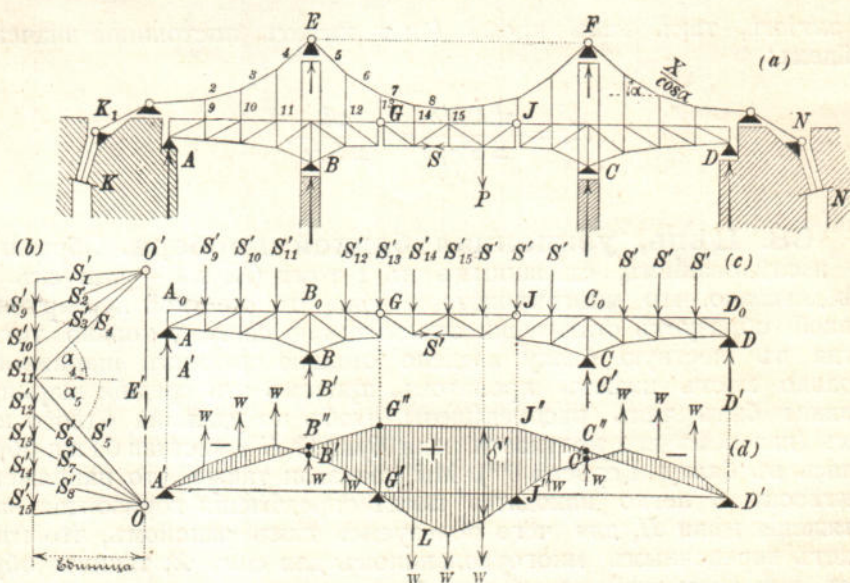
дѣлимъ  $H$ , приравнивая нулю изгибающій моментъ для сѣченія балки  $G'$ . Если устранить шарниръ  $G$ , тогда получимъ цѣпь, усиленную балкой Гербера; система эта будетъ статически неопредѣлима; за статически неопредѣлимую величину слѣдуетъ выбрать горизонтальное натяженіе цѣпи. Если всѣ напряжения  $S$  написаны въ такой формѣ:

$$S = S_0 - S'X,$$

то для расчета  $X$  надо пользоваться слѣдующими формулами:

$$\begin{aligned} \text{вліяніе сосредоточеннаго груза: } X &= \frac{P\delta'}{\sum S'^2 \rho} \cdot *) \\ \text{„ измѣненія температуры: } X_i &= \frac{\sum S' \varepsilon t s}{\sum S'^2 \rho} \\ \text{„ перемѣщеній опоръ: } \Delta X &= - \frac{L'}{\sum S'^2 \rho}. \end{aligned}$$

Примѣнимъ этотъ способъ къ фермѣ, изображенной на фиг. 163. Жесткая балка имѣетъ два шарнира  $G$  и  $J$ , лежащіе въ среднемъ пролетѣ. Для того чтобъ получить состояніе нагрузки  $X = -1$ , надо вообразить, что въ участкахъ вызываются сжимающія усилія  $S'_1, S'_2, S'_3, \dots$ , которымъ соответствуетъ горизонтальный распоръ, равный единицѣ. На фиг. 163<sup>b</sup> показано, какъ эти силы и

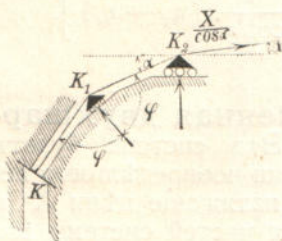


Фиг. 163.

\*) Здѣсь имѣемъ дѣло только съ тѣми грузами, которые дѣйствуютъ на мостъ послѣ того, какъ цѣпь обратилась въ жесткую систему, а именно съ грузами временными.



соответствующія сжимающія усилія  $S'_9, S'_{10}, S'_{11} \dots$  распределяются въ подвѣскахъ; въ виду симметріи достаточно изслѣдовать только лѣвую половину. Сжимающія усилія  $S'_9, S'_{10}, S'_{11} \dots$  образуютъ нагрузку жесткой балки; сопротивленія опоръ для нея  $A', B', C', D'$  опредѣляются по правиламъ, изложеннымъ въ VI отдѣлѣ I тома (выпускъ II). Напряженія  $S'$  стержней балки опредѣляются съ помощью діаграммы Кремоны. Затѣмъ находимъ напряженія  $\sigma' = \frac{S'}{F}$  или измѣненія длины  $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$  всѣхъ стержней балки, потомъ по № 46 или по № 47 грузы  $w$  и наконецъ строимъ площадь прогибовъ пояса  $A_0D_0$  (на фиг. 163<sup>a</sup> заштрихована). Эта площадь будетъ площадью вліянія для количества  $X$  (множитель ея  $= \frac{I}{\Sigma S'^2 \rho}$ ); она ограничена многоугольниками моментовъ  $A'B'G', G'L'J', J'C'D'$  для простыхъ балокъ  $A'G', G'J', J'D'$ , нагруженныхъ грузами  $w$ , и замыкающимъ многоугольникомъ  $A'G''J''D'$ , который опредѣляется помощью укороченій  $B''B'$  и  $C''C'$  въ стойкахъ  $B_0B$  и  $C_0C$  \*). Надо замѣтить, что выраженіе  $\Sigma S'^2 \rho$  распространяется на всѣ стержни системы (на стержни балки, подвѣски, части несущей цѣпи и цѣпей удерживающихъ).



Фиг. 164.

При вычисленіи  $X$ , принимается болѣею частью, что температура всѣхъ стержней, соответствующая ненапряженному начальному состоянію, измѣняется на равную для всѣхъ величину  $t$ . Отсюда слѣдуетъ, что вліяніе измѣненія температуры для стержней балки и подвѣсокъ сравнительно очень ничтожно, и что поэтому въ числитель выраженія для  $X$ , слѣдуетъ принять во вниманіе только части несущей и удерживающихъ цѣпей. Для участка несущей цѣпи, наклоненнаго подъ угломъ  $\alpha$  къ горизонту, получимъ  $S' = -1 \cdot \frac{I}{\cos \alpha}$ , а для участка удерживающей цѣпи, при ея расположеніи, показанномъ на фиг. 164, получается значеніе  $S' = -1 \cdot \frac{I}{\cos \alpha'}$ . Отсюда находимъ:

$$X_t = - \frac{\epsilon t}{\Sigma S'^2 \rho} \left\{ \Sigma s \frac{I}{\cos \alpha} + 2(s_a + s_b) \frac{I}{\cos \alpha'} \right\},$$

гдѣ  $s_a = \overline{KK_1}$  и  $s_b = \overline{K_1K_2}$ . Сумма  $\Sigma s \frac{I}{\cos \alpha}$  распространяется только на участки несущей цѣпи. Вслѣдствіе возвышенія температуры горизонтальное натяженіе цѣпи уменьшается.

Перемѣщеніями опоръ болѣею частью пренебрегаютъ, хотя измѣненія длины тонкихъ среднихъ опоръ и сжиманіе анкерныхъ укрѣпленій могутъ оказать замѣтное вліяніе на количество  $X$ . По-

\*) Стойки  $A_0A$  и  $D_0D$  фермы, фиг. 163, при состояніи нагрузки  $X = -1$ , ненапряжены; ихъ удлиненія равны нулю.



ложимъ, напр., что опора  $E$  понизилась на величину  $\eta_1$ , опора  $F$  на величину  $\eta_2$ , а точка опоры  $K$  перемѣстилась по направлению  $KK_1$  на величину  $\eta_3$  и соответствующая точка праваго удерживающаго тѣла — на величину  $\eta_4$ . Въ точкахъ  $E$  и  $K$  при состояніи нагрузки  $X = -1$  появятся сопротивленія опоръ:

$$\begin{aligned} E' &= 1 (tg\alpha_4 + tg\alpha_5), \text{ направленное внизъ,} \\ K' &= 1 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \quad \quad \quad \text{„} \quad \quad \quad \text{вверхъ} \quad *) \end{aligned}$$

и соответственно этому равныя сопротивленія въ точкахъ  $F$  и  $N$ .  
Возможная работа этихъ реакцій опоръ равна:

$$L' = (tg\alpha_4 + tg\alpha_5) (\eta_1 + \eta_2) + \frac{1}{\cos \alpha'} (\eta_3 + \eta_4),$$

поэтому получимъ:

$$\Delta X = - \frac{1}{\Sigma S'^2 \rho} \left[ (tg\alpha_4 + tg\alpha_5) (\eta_1 + \eta_2) + \frac{1}{\cos \alpha'} (\eta_3 + \eta_4) \right].$$

**69. Однопролетная цѣпь, усиленная двухшарнирной арочной фермой,** фиг. 165. Эта система будетъ дважды статически неопредѣлима. За статически неопредѣлимые величины проще всего принять горизонтальное натяженіе цѣпи  $X'$  и горизонтальный распоръ  $X''$  арки. Напряженія частей системы выразятся въ такой формѣ:

$$S = S_0 - S' X' - S'' X''.$$

Фиг. 168 изображаетъ простую балку  $AB$ , въ которую обращается система, когда  $X' = 0$  и  $X'' = 0$ ; фигуры же 166 и 167 представляютъ эту же балку, но для состояній нагрузокъ  $X' = -1$  и  $X'' = -1$ .

При состояніи нагрузки  $X' = 1$  на балку  $AB$  будутъ дѣйствовать вертикальные грузы  $S'_7, S'_8$  (т. е. сжимающія усилія въ подвѣскахъ, которыя опредѣляются точно также, какъ и въ предыду-

\*) Мы предполагаемъ, что въ точкахъ  $K_1$  и  $K_2$  расположены подвижныя опоры. Сопротивленіе опоры  $K_2$ , движущейся горизонтально, будетъ поэтому вертикально; сопротивленіе опоры  $K_1$  дѣлитъ пополамъ уголъ  $KK_1K_2$ . Каждый изъ участковъ цѣпи  $KK_1$  и  $K_1K_2$  будетъ тогда напряженъ силой  $\frac{X}{\cos \alpha'}$ , гдѣ  $\alpha'$  — уголъ наклоненія  $K_1K_2$  къ горизонту. Такимъ образомъ въ точкѣ  $K$  возбуждается *сопротивленіе*, равное  $\frac{X}{\cos \alpha'}$  и направленное отъ  $K_2$  къ  $K_1$ ; въ случаѣ же  $X = -1$ , сопротивленіе это будетъ равно  $1 \cdot \frac{1}{\cos \alpha'}$  и направлено отъ  $K_2$  къ  $K_1$ .

щемъ примѣръ); при состояніи нагрузки  $X'' = -1$  балка находится подъ вліяніемъ двухъ горизонтальныхъ силъ 1. Вычисливъ грузы  $w_1$  и  $w''$ , соответствующіе напряженіямъ  $S'$  и  $S''$ , построимъ линіи прогибовъ ( $\delta'$  и  $\delta''$ ), какъ кривыя моментовъ для простой балки \*), и наконецъ разрѣшимъ условія упругости:

$$\begin{aligned} X' \Sigma S'^2 \rho + X'' \Sigma S' S'' \rho &= P \delta' + \Sigma S' \varepsilon t s - L' \\ X' \Sigma S'' S' \rho + X'' \Sigma S''^2 \rho &= P \delta'' + \Sigma S'' \varepsilon t s - L''. \end{aligned}$$

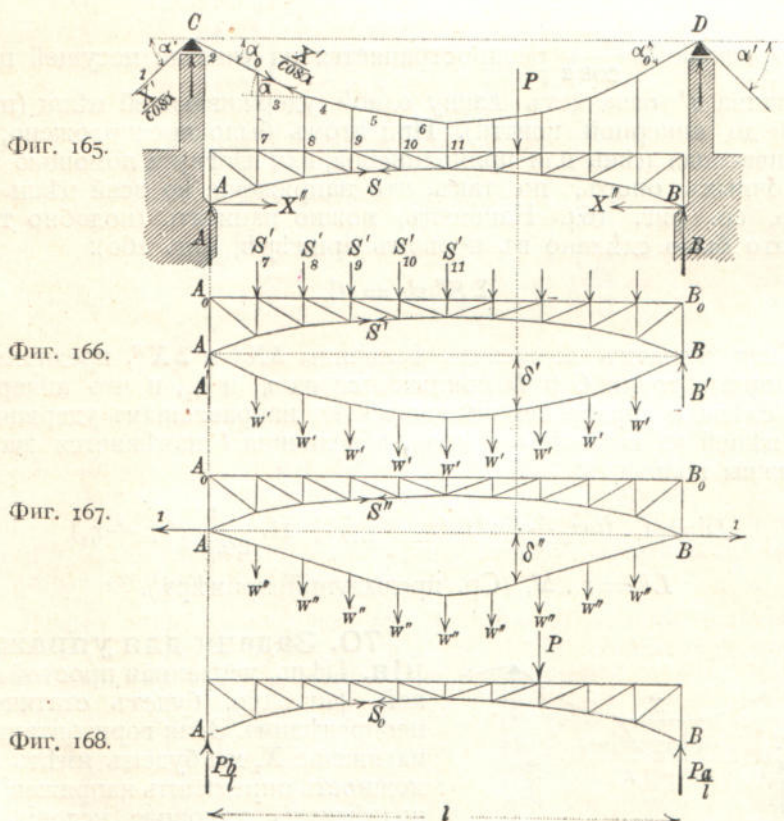
Вліяніе нагрузки выразится въ такой формѣ:

$$X' = P(\omega'' \delta' - \omega \delta'')$$

$$X'' = P(\omega' \delta'' - \omega \delta')$$

$$\text{гдѣ } \omega' = \frac{\Sigma S'^2 \rho}{N}, \quad \omega'' = \frac{\Sigma S''^2 \rho}{N}, \quad \omega = \frac{\Sigma S' S'' \rho}{N}$$

$$N = \Sigma S'^2 \rho + \Sigma S''^2 \rho - (\Sigma S' S'' \rho)^2;$$



\*) На фиг. 166 и 167 мы пренебрегли измѣненіями длины конечныхъ стоекъ  $AA_0$  и  $BB_0$ .



затѣмъ получимъ вліяніе измѣненія температуры:

$$X'_t = \omega'' \Sigma S' \varepsilon t s - \omega \Sigma S'' \varepsilon t s$$

$$X''_t = \omega' \Sigma S'' \varepsilon t s - \omega \Sigma S' \varepsilon t s$$

и вліяніе перемѣщенія опоръ:

$$\Delta X' = -\omega'' L' + \omega L''$$

$$\Delta X'' = -\omega' L'' + \omega L'.$$

Выраженія суммъ, зависящія отъ  $S'$ , распространяются на стержни арки, на подвѣски, на несущую и удерживающія цѣпи; а выраженія суммъ, зависящія отъ  $S''$ , распространяются только на арку, потому что для частей цѣпи и подвѣсокъ  $S'' = 0$ .

Если измѣненіе температуры принято равномернымъ, то надо, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, положить:

$$\Sigma S' t s = \Sigma s \frac{1}{\cos \alpha} + 2s' \frac{1}{\cos \alpha'},$$

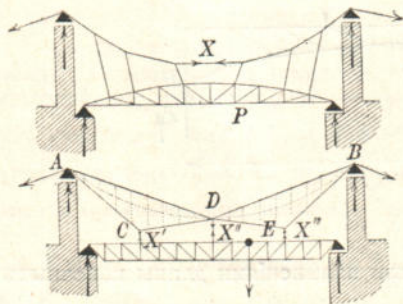
гдѣ выраженіе  $\Sigma s \frac{1}{\cos \alpha}$  распространяется на участки несущей цѣпи, а величина  $s'$  означаетъ длину одной удерживающей цѣпи (измѣренной до анкерной плиты!). При этомъ было предположено, что удерживающая цѣпь или прямолинейна, или изогнута помощью промежуточныхъ опоръ, но такъ, что напряженіе во всей цѣпи одинаково, ср. фиг. 164. Наконецъ, можно написать (подобно тому, какъ это было сдѣлано въ первомъ примѣрѣ, фиг. 160):

$$\Sigma S'' \varepsilon t s = \varepsilon t l.$$

Если желаемъ вычислить величины  $\Delta X'$  и  $\Delta X''$ , предполагая, что опорныя точки  $C$  и  $D$  понижаются на  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , и что анкерныя плиты слѣва и справа перемѣщаются по направленіямъ удерживающихъ цѣпей на величины  $\eta_3$  и  $\eta_4$ , а величина  $l$  измѣняется на  $\Delta l$ , то должны положить:

$$L' = 1 \cdot (tg \alpha_0 + tg \alpha') (\eta_1 + \eta_2) + 1 \cdot \frac{1}{\cos \alpha'} (\eta_3 + \eta_4)$$

$$L'' = 1 \cdot \Delta l. \text{ (Ср. предыдущій примѣръ).}$$

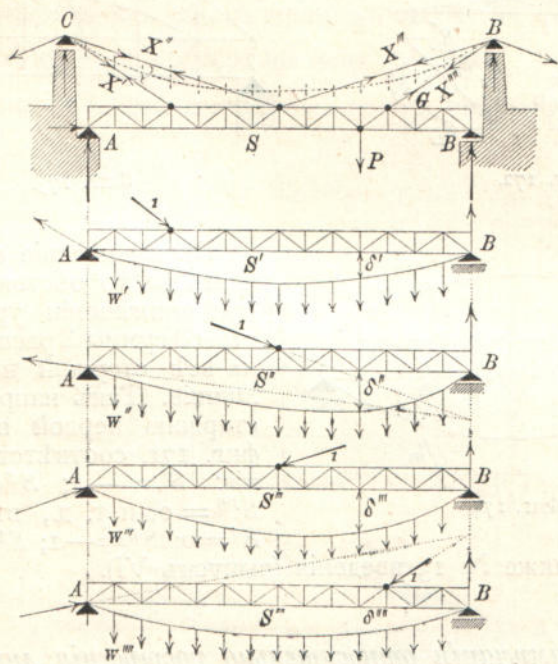


Фиг. 196 и 170.

**70. Задачи для упражненія.** Цѣпь, усиленная простой балкой, фиг. 169, будетъ статически неопредѣлима. Зная горизонтальное натяженіе  $X$ , мы будемъ имѣть возможность опредѣлить напряженія въ подвѣскахъ помощью условія, что цѣпь будетъ веревочнымъ многоугольникомъ для этихъ силъ.

Фиг. 170 представляетъ трижды статически неопредѣлимую висячую систему (*система Ордиша-Лесбевра*). Зная напряженія  $X'$ ,  $X''$ ,  $X'''$  въ

вертикальных подвѣскахъ, мы можемъ опредѣлить силы, появляющіяся въ несущихъ цѣпяхъ  $AC$ ,  $CD$ ,  $EB$ ,  $ED$ ,  $AD$ ,  $DB$  и въ удерживающихъ цѣпяхъ. Цѣпь, вычерченная пунктиромъ, принимаетъ на себя только вѣсъ несущихъ цѣпей. При симметричномъ расположеніи линія прогибовъ для  $X''' = -1$  будетъ зеркальнымъ изображеніемъ линіи прогибовъ для  $X' = -1$ .



Фиг. 171.

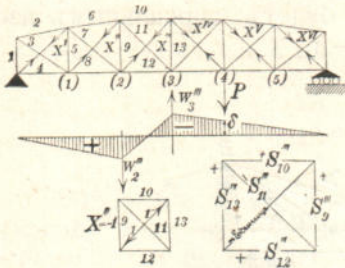
Подобная же висячая система показана на фиг. 171; она четырежды статически неопредѣлима. Состоянія нагрузокъ  $X' = -1$ ,  $X'' = -1$ ,  $X''' = -1$ ,  $X'''' = -1$  для жесткой балки приведены на чертежѣ; надо замѣтить, что въ неподвижной опорѣ  $A$  вызываются наклонныя сопротивленія.

Рѣшетчатая балка, фиг. 172, имѣетъ въ каждой панели перекрестныя діагонали, которые въ состояніи сопротивляться какъ растягивающимъ такъ и сжимающимъ усиліямъ.

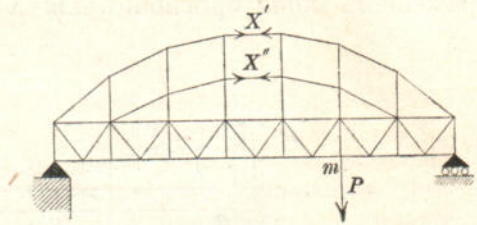
При  $n$  панеляхъ рѣшетка будетъ  $n$  — разъ статически неопредѣлима. На чертежѣ представлена діаграмма для состоянія  $X''' = -1$ ; дѣйствіе этой силы распространяется только на стержни 9, 10, 11, 12, 13, поэтому будемъ имѣть дѣло только съ двумя грузами  $w$ , а именно  $w'''_2$  и  $w'''_3$ , которые опредѣляются проще всего по уравн. 10 (№ 47). Для  $w'''_2$  получаемъ положительное, для  $w'''_3$  отрицательное значеніе, а затѣмъ уже находимъ и линію прогибовъ ( $\delta'''$ ) (см. фиг. 172). Такимъ же точно путемъ изслѣдуются состоянія  $X' = -1$ ,  $X'' = -1$ , и т. д.



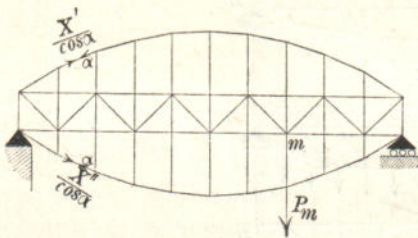
На фиг. 173 и 174 представлены дважды статически неопредѣлимые системы, которые изслѣдуются подобно жесткимъ висячимъ мостамъ, изображеннымъ на фиг. 163, 165, 169.



Фиг. 172.



Фиг. 173.



Фиг. 174.

Въ заключеніе еще разъ укажемъ на то обстоятельство, что при примѣненіи уравненій V на стр. 68 суммы  $\Sigma$  распространяются на всѣ стержни необходимые и лишніе. Такъ наприм., лишнему стержню первой панели фермы, фиг. 171, соответствуютъ значенія:  $S' = -1$ ;  $S'' = 0$ ;  $S''' = 0$ ;  $S'''' = 0$ , и т. д., второй панели:  $S' = 0$ ;  $S'' = -1$ ;  $S''' = 0$ ;  $S'''' = 0$

и т. д. Ср. также № 13 введенія (выпускъ VI).

#### д. Общія замѣчанія относительно построенія линий вліянія.

71. Если линии вліянія для количествъ  $X$  въ рѣшеткѣ, нагруженной параллельными грузами  $P$ , опредѣлены по одному изъ способовъ, приведенныхъ въ № 54 до 69, то линии вліянія для напряженій  $S$  и сопротивленій опоръ  $C$  можно построить при помощи зависимости первой степени между количествами  $S$ ,  $C$  и  $X$ . Положимъ, требуется построить линію вліянія для напряженія

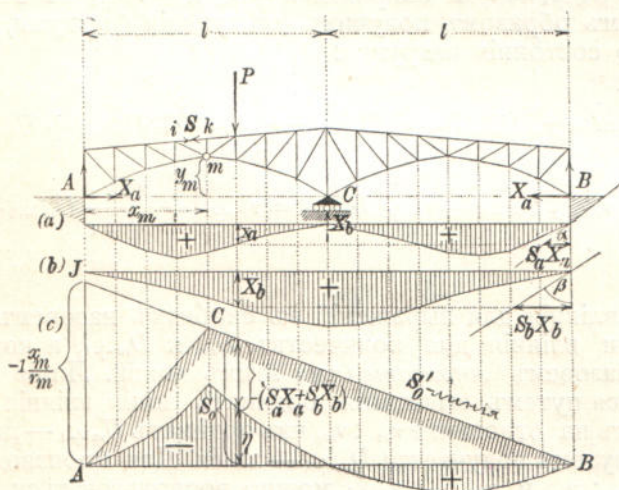
$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \dots;$$

для этого приравниваемъ сначала нулю всѣ величины  $X$ , строимъ линію вліянія для  $S_0$  въ статически опредѣлимой главной системѣ по способамъ, описаннымъ въ I томѣ, и затѣмъ уменьшаемъ ординаты этой линіи на сумму произведеній ординатъ линій вліяній для количествъ  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ , ... на величины  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ , ...; умноженіе это проще всего дѣлается при помощи угловъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ... , которые опредѣляются изъ формулъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = S_a, \operatorname{tg} \beta = S_b, \operatorname{tg} \gamma = S_c, \dots *)$$

\*) Въ этомъ случаѣ большую пользу приносятъ пропорціональный циркуль.

На фиг. 175 показано примѣненіе этого общаго способа къ арочной фермѣ съ неподвижными опорными шарнирами ( $A, B$ ) и съ подвижнымъ опорнымъ шарниромъ  $C$ , имѣющимъ движеніе по горизонтальному направленію. За статически неопредѣлимые величины приняты: горизонтальный распоръ  $X_a$  и сопротивление средней опоры  $X_b$ . Требуется построить линію вліянія для напряженія  $S$  въ стержнѣ  $i-k$  верхняго пояса. Когда приравняемъ нулю величины  $X_a$  и  $X_b$ , то получимъ простую балку  $AB$ ; поэтому  $S_0$ —линія будетъ состоять изъ двухъ прямыхъ  $AC$  и  $CB$ , которыя опредѣляются на фиг. 175 откладываніемъ отрезка  $AJ = -1 \frac{x_m}{r_m}$  приче́мъ  $r_m$  означаетъ разстояніе узла  $m$  отъ стержня  $ik$  \*).



Фиг. 175.

Напряженія  $S_a$  и  $S_b$ , соответствующія состояніямъ нагрузки  $X = -1$  и  $X_b = -1$ , получаются здѣсь *отрицательными*, тогда какъ величины  $X_a$  и  $X_b$  имѣютъ положительные значенія; членъ:  $-(S_a X_a + S_b X_b)$  поэтому положителенъ; сложивъ этотъ членъ съ отрицательнымъ значеніемъ  $S_0$ , получимъ при  $P=1$ :

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b = P\eta$$

и найдемъ для количества  $S$  площадь вліянія, сплошь заштрихованную на фиг. 175<sup>e</sup>.

При помощи этой площади можемъ найти для всякаго состоянія нагрузки

$$S = \Sigma P\eta.$$

<sup>e</sup>) Ср. фиг. 268 въ № 168 (выпускъ IV—I томъ).

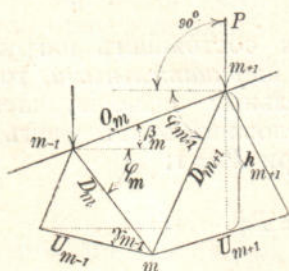


**72.** — Слишком утомительную работу при построении линий влияния для всех напряжений  $S$  сложной статически неопределимой решетки можно значительно сократить, если воспользоваться статической зависимостью, которая существует между отдельными количествами  $S$ . Обыкновенно применяются решетки, состоящая из ряда треугольников, присоединенных друг к другу; в таком случае проще всего выразить напряжения в промежуточных стержнях посредством напряжений в поясах. При нагруженном верхнем поясе рассмотрим нижний узел  $m$  (фиг. 177); примем сначала, что  $U_{m-1} = +1$  и  $U_{m+1} = 0$ , и определим при помощи диаграммы напряжений, построенной на фиг. 177<sup>a</sup> соответствующие напряжения:  $-x_m$  (сжатие) и  $+x_{m+1}$  (растяжение) в частях решетки  $D_m$  и  $D_{m+1}$ . Точно также определим для состояния  $U_{m-1} = 0$  и  $U_{m+1} = +1$  напряжения  $+y_m$  и  $-y_{m+1}$  в этих же частях; таким образом получим следующие формулы, пригодные для всякого состояния нагрузки:

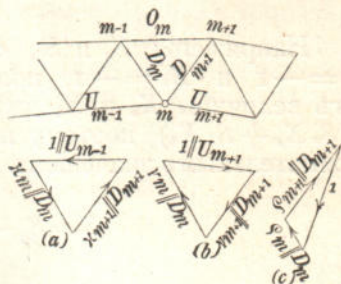
$$D_m = -x_m U_{m-1} + y_m U_{m+1} = y_m \left( -\frac{x_m}{y_m} U_{m-1} + U_{m+1} \right)$$

$$D_{m+1} = +x_{m+1} U_{m-1} - y_{m+1} U_{m+1} = y_{m+1} \left( +\frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} U_{m-1} - U_{m+1} \right).$$

Линии влияния для выражений в скобках назовем краткости ради линиями влияния для количеств  $D_m$  и  $D_{m+1}$ , а коэффициенты  $y_m$  и  $y_{m+1}$  назовем множителями этих линий. Линия влияния для  $D_m$  получается путем вычитания ординат линии влияния для  $U_{m-1}$ , умноженных на отношение  $x_m : y_m$ , из ординат  $U_{m+1}$  — линии; точно таким же путем получается  $D_{m+1}$  — линия. Для произведения умножения на  $x_m : y_m$  и  $x_{m+1} : y_{m+1}$  можно воспользоваться или вспомогательным углом или пропорциональным циркулем.



Фиг. 176.



Фиг. 177.

При нагруженном нижнем поясе надь выразить напряжения  $D$  в зависимости от напряжений  $O$ .

Уравнения, выведенные выше для  $D_m$  и  $D_{m+1}$ , пригодны также и для случая, когда нагружен нижний пояс, но до тех пор пока к узлу  $m$  не приложено грузов. Если единица груза приложена к узлу  $m$ , то надо прибавить справа еще члены  $\rho_m$  и  $\rho_{m+1}$ , которые получаются из фиг. 177 с. Ср. также подобный общий способ в I томѣ (№ 170 — выпуск IV).

Если не только грузы, но вообще всѣ внѣшнія силы (а также и сопротивленія опоръ) параллельны между собой, что бываетъ обыкновенно въ многопролетныхъ балкахъ и въ жесткихъ балкахъ висячихъ мостовъ, то для случая, когда всѣ промежуточные стержни имѣютъ наклонное относительно грузовъ положеніе (фиг. 176), получимъ слѣдующія уравненія, которыми мы уже пользовались въ I томѣ:

$$\begin{aligned} D_m \cos \varphi_m &= -U_{m-1} \cos \gamma_{m-1} - O_m \cos \beta_m \\ D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} &= -U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} - O_m \cos \beta_m. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, если линіи вліянія для количествъ  $O \cos \beta$  и  $U \cos \gamma$  найдены посредствомъ способа, описаннаго въ № 71, то этимъ самымъ опредѣляются и линіи вліянія для количествъ  $D \cos \varphi$ .

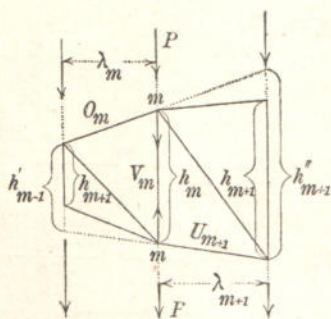
При дѣйствіи внѣшнихъ параллельныхъ силъ на рѣшетку, стержни которой частью совпадаютъ съ направлениемъ силъ, фиг. 178, будутъ имѣть мѣсто выраженія:

$$-O_m \cos \beta_m = +U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = \frac{M_m}{h_m} \quad *)$$

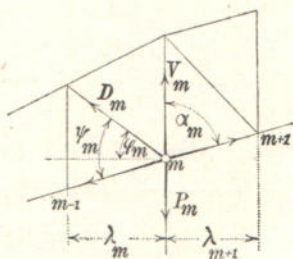
$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

$$V_m = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} \left[ \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{h_{m-1}}{h'_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} \right] \text{ нагрузка на верхнемъ поясѣ}$$

$$V_m = \frac{h''_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \left[ \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{h_{m+1}}{h''_{m+1}} \right] \text{ нагрузка на нижнемъ поясѣ;}$$



Фиг. 178.



Фиг. 179.

\*)  $M_m$  означаетъ изгибающій моментъ относительно узла  $m$ ; онъ можетъ быть представленъ въ такой формѣ:  $M_m = M_{om} - M'_m X' - M''_m X'' - \dots$ , гдѣ  $X'$ ,  $X''$ , ... статически неопредѣлимые величины. Формулы для  $O$ ,  $D$  и  $V$  выведены въ I томѣ (въ № 171 и въ § 42<sup>2</sup> — выпускъ IV). Выраженія для  $V$  написаны здѣсь въ другой формѣ. Формулы для  $O$  и  $U$  пригодны при произвольномъ направленіи внѣшнихъ силъ.



изъ нихъ мы видимъ, что удобнѣе будетъ постронть сначала линіи вліянія для значеній  $\frac{M}{h}$ , а затѣмъ изъ разности между двумя сосѣдними площадями вліянія для количествъ  $\frac{M}{h}$  можно получить площадь вліянія для количества  $D \cos \varphi$ . Точно также площадь вліянія для количества  $V_m$  опредѣляется изъ двухъ сосѣднихъ площадей вліянія для количествъ  $\frac{M}{h}$ , изъ которыхъ одна площадь должна быть умножена на отношеніе высотъ; затѣмъ у площадей вліянія для количествъ  $V$  надо приписать соотвѣтствующие множители.

При прямолинейномъ поясѣ опредѣленіе усилий  $V$  будетъ значительно проще. Такъ напримѣръ, при прямолинейномъ нижнемъ поясѣ, на фиг. 179, получимъ условіе равновѣсія:

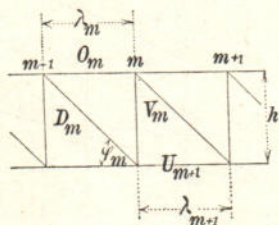
$$(V_m - P) \sin \alpha_m + D_m \sin \psi_m = 0,$$

а отсюда

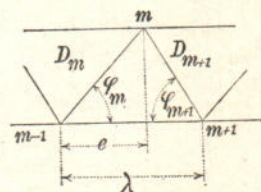
$$V_m = -\frac{D_m \sin \psi_m}{\sin \alpha_m} + P = \frac{\sin \psi_m}{\sin \alpha_m \cos \varphi_m} \left( -D_m \cos \varphi_m + \frac{P \cos \varphi_m \sin \alpha_m}{\sin \psi_m} \right).$$

Если грузъ единица лежитъ внѣ панелей  $\lambda_m$  и  $\lambda_{m+1}$ , то площадь вліянія для выраженія, стоящаго въ скобкахъ, отличается отъ площади вліянія для количества  $D_m \cos \varphi_m$  только знакомъ; къ ординатѣ линіи вліянія для количества  $D_m \cos \varphi_m$ , взятой подъ узломъ  $m$  съ обратнымъ знакомъ, надо прибавить отръзокъ:  $\frac{1 \cdot \cos \varphi_m \sin \alpha_m}{\sin \psi_m}$ .

Если нижній поясъ будетъ перпендикуляренъ къ направленію груза, то получимъ  $\frac{\sin \psi_m}{\sin \alpha_m \cos \varphi_m} = \operatorname{tg} \varphi_m$  \*).



Фиг. 180.



Фиг. 181.

Въ особенности просто будетъ все изслѣдованіе для фермъ съ параллельными поясами, когда внѣшнія силы перпендикулярны къ поясамъ. Здѣсь придется опредѣлить только моменты и перерѣзывающія силы, изъ которыхъ и вычисляются всѣ напряжения.

\*) См. подобныя же изслѣдованія въ № 148 (томъ I — выпускъ III).

Для рѣшетки на фиг. 180 получаемъ, напр.

$$-O_m h = +U_{m+1} h = M_m; D_m \sin \varphi_m = Q_m$$

$$V_m = -Q_m, \text{ грузы сверху}$$

$$V_m = -Q_{m+1}, \text{ грузы снизу.}$$

( $Q_m$  означаетъ перерѣзывающую силу для  $m$ -ой панели).

Такъ какъ  $Q_m = \frac{1}{\lambda_m} (M_m - M_{m-1})$  \*), то каждая площадь вліянія для количествъ  $Q\lambda$  найдется послѣ опредѣленія площадей вліянія для  $M$ , какъ разность двухъ сосѣднихъ площадей вліянія для количествъ  $M$ ; или же сначала строимъ площади вліянія для  $Q\lambda$ , и затѣмъ при помощи уравненія

$$M_m = M_{m-1} + Q_m \lambda_m,$$

изъ одной площади вліянія для  $M$  получаемъ по порядку всѣ остальные.

Если имѣемъ другую рѣшетку, фиг. 181, узлы которой  $m-1$  и  $m+1$  принадлежатъ нагруженному поясу, причемъ  $Q$  есть перерѣзывающая сила для панели  $(m-1)-(m+1)$ , то будемъ имѣть такую зависимость:

$$M_{m+1} = M_{m-1} + Q\lambda; M_m = M_{m-1} + Qe.$$

$$O_{m-1} h = -M_{m-1}, U_m h = +M_m, O_{m+1} h = -M_{m+1}$$

$$D_m \sin \varphi_m = -D_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = +Q.$$

**73.**—Площади вліянія для напряженій *простой* статически неопредѣлимой фермы изобразятся весьма просто; напряжение  $S$  можно написать въ такой формѣ

$$S = S_0 - S'X = S' \left( \frac{S_0}{S'} - X \right),$$

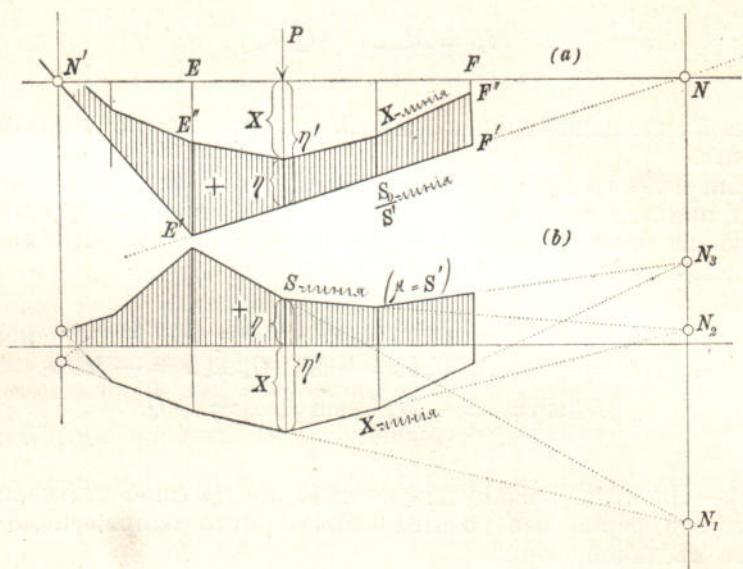
поэтому площади вліянія для  $S$  можно представить, какъ разность между площадью вліянія для  $X$  и площадью вліянія для  $\frac{S_0}{S'}$  (послѣдняя площадь ограничена нѣсколькими линиями и построение ея столь же просто, какъ и построение площади вліянія для  $S_0$ ); множитель площади вліянія для  $S$  будетъ величина  $S'$ .

Будемъ откладывать ординаты  $X$  и  $\eta' = \frac{S_0}{S'}$  (фиг. 182 а) отъ одной и той же прямой  $N'N$ , тогда получимъ площадь вліянія для  $S$  (ординаты ея обозначимъ черезъ  $\eta$ ), отнесенную къ линии вліянія для  $X$  какъ къ ломанной нулевой оси. Если мы возьмемъ для всѣхъ

\*) См. № 164 (I томъ — выпускъ IV).



площадей вліянія для количествъ  $S$  общую прямолинейную нулевую ось (при вертикальной нагрузкѣ она выбирается большею частью горизонтально), то получимъ фиг. 182 b, на которой ординаты  $\eta'$  отложены отъ линіи вліянія для  $X$ ; а отсюда можно вывести правило, что внутри границъ прямолинейнаго участка линіи вліянія для количества  $\frac{S_0}{S'}$  на фиг. 182 a, соответствующія стороны  $S$  — линіи и  $X$  — линіи пересѣкаются въ точкахъ той прямой, которая проходитъ черезъ нулевую точку  $\frac{S_0}{S'}$  — линіи и будетъ параллельна грузамъ  $P$ . На основаніи этого свойства можно получить  $S$  — линію изъ  $X$  — линіи, если только будутъ извѣстны одна ордината и нулевая точка  $\frac{S_0}{S'}$  — линіи \*).



Фиг. 182.

**Примѣръ.** На фиг. 183 построена, по правиламъ № 67, линія вліянія для горизонтальнаго распора  $X$  простой статически неопредѣлимой арочной фермы; причемъ линія вліянія отнесена къ горизонтальной нулевой оси  $A'B'$  \*\*). Требуется построить площадь вліянія для напряженія  $O$  въ стержнѣ верхняго пояса, противоположащаго узлу  $m$ .

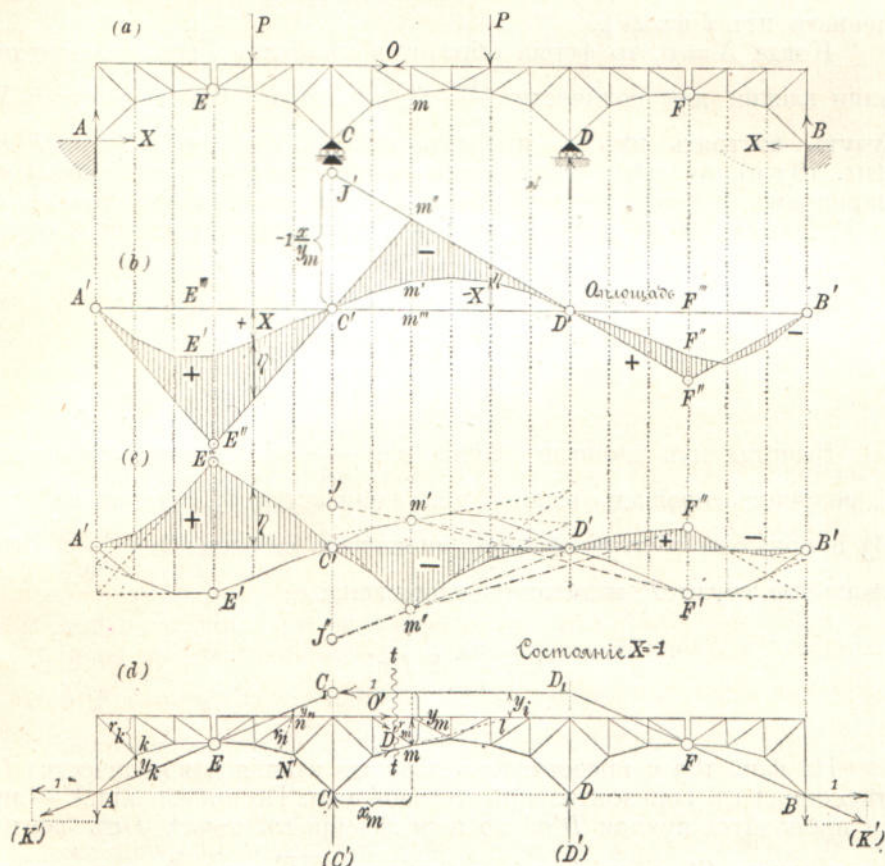
Состояніе нагрузки  $X = -1$  показано на фиг. 183 d. Къ опорамъ  $A$  и  $B$  приложены силы ( $K'$ ), горизонтальныя составляющія которыхъ, равныя 1, направлены внаружу; эти силы должны пройти че-

\*) Напомнимъ, что опредѣленіе нулевыхъ точекъ  $S_0$  — линій можно произвести при помощи нахождения полюсовъ кинематической цѣпи. Томъ I, § 32 (выпускъ III).

\*\*) На фиг. 163 мы пренебрегли измѣненіями длины опорныхъ стоекъ  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $B$ , соответствующими состоянію нагрузки  $X = -1$ . Ср. фиг. 162, стр. 70.

резъ шарниры  $E$  и  $F$ , такъ какъ иначе части арокъ  $AE$  и  $BF$  могли бы вращаться около точекъ  $E$  и  $F$ . Затѣмъ присоединимъ равныя силы  $(C')$  и  $(D')$ , которыя уравновѣшивали бы силу  $(K')$ . Ломанная линия  $A, C_1, D_1, B$ , состоящая изъ трехъ прямыхъ, будетъ веревочнымъ многоугольникомъ (многоугольникомъ равнодѣйствующимъ) для силъ  $K', C', D' K'$ .

Сѣченіе  $tt$ , проведенное для нахождения напряженія  $O'$ , встрѣчаетъ бокъ веревочнаго многоугольника  $C_1 D_1$ , который опредѣляетъ положеніе равнодѣйствующей  $(R)$  внѣшнихъ силъ  $K'$  и  $C'$ , дѣйствующихъ лѣвѣе сѣченія  $tt$ . Измѣримъ вертикальное разстояніе



Фиг. 183.

$y_m$  точки  $m$  отъ бока  $C_1 D_1$  и, зная, что горизонтальная составляющая силы  $R$  равна 1, составимъ уравненіе моментовъ по Риттеру относительно точки  $m$ :

$$O' r_m - 1 \cdot y_m = 0, \text{ откуда } O' = +1 \frac{y_m}{r_m}$$

и затѣмъ получимъ окончательно:

$$O = O' \left( \frac{O_0}{O'} - X \right) = \frac{y_m}{r_m} \left( \frac{r_m}{y_m} O_0 - X \right).$$



[Предыдущее описаніе способа опредѣленія напряженій  $S'$  имѣетъ значеніе при всякомъ произвольномъ наклоненіи сторонъ многоугольника равнодѣйствующихъ, тѣхъ сторонъ, которыя пересѣкаются сѣченіемъ  $tt$ ; такъ напр., для стержня верхняго пояса первой панели мы получимъ:  $O' = -1 \cdot \frac{y_k}{r_k}$ , для стержня нижняго пояса 5-ой панели:  $U' = -1 \cdot \frac{y_n}{r_n}$ , для раскоса, встрѣчаемаго сѣченіемъ  $tt$ :  $D' = -1 \cdot \frac{y_i}{r_i}$ , гдѣ  $r_i$  означаетъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ  $i$  на  $D'$ ].

Когда  $X=0$ , то ферма обратится въ балку Гербера, поэтому линіи вліянія для количествъ  $\frac{r_m}{y_m} O_0$  (см. томъ I, § 44 — выпускъ V) будутъ состоять изъ 4 прямыхъ  $A'E''$ ,  $E''C'm''$ ,  $m''D'F''$  и  $F''B'$  (фиг. 183 b), нулевая точки которыхъ соотвѣтствуютъ опорнымъ шарнирамъ, а точки пересѣченія лежатъ на вертикаляхъ точекъ  $E$ ,  $m$ ,  $F$ . Прямая  $D'm''$  должна отсѣкаться на вертикали точки  $C$  отрезокъ:

$$\overline{C'J'} = \frac{r_m}{y_m} \left( -\frac{x_m}{r_m} \right) = -\frac{x_m}{y_m}.$$

Вычитая изъ площади вліянія для  $\frac{r_m}{y_m} O_0$  площадь вліянія для  $X$ , получимъ площадь вліянія для количества  $O$ , которая на фиг. 183 b показана заштрихованной; множитель ея равняется  $\frac{y_m}{r_m}$ . Вертикальные грузы  $P$  вызываютъ напряженіе:

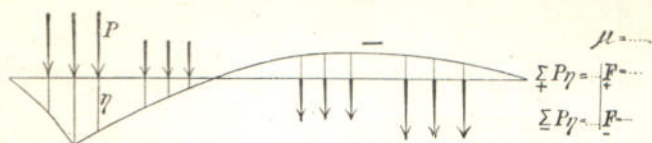
$$O = \frac{y_m}{r_m} \Sigma P \eta.$$

На фиг. 183 с представлена площадь вліянія для количества  $O$ , отнесенная къ горизонтальной нулевой оси. По построеніи  $X$  — линіи проводится прямая  $D'm'$  до пересѣченія въ точкѣ  $J$  съ вертикалью точки  $C'$ , откладывается отрезокъ  $\overline{JJ''} = 1 \cdot \frac{x_m}{y_m}$  и помощью прямой  $J''D'$  опредѣляется точка  $m''$  линіи вліянія для  $O$ . Для нахождения точекъ  $F''$  и  $E''$  пользуемся слѣдующими условіями, доставляемыми линіей вліянія для  $O_0$  (эту линію вліянію можно начертить отъ руки), а именно что прямые  $m''F''$  и  $m'F'$  должны пересѣчься въ точкѣ, лежащей на вертикали точки  $D'$ , а прямые  $m''E''$  и  $m'E'$  (на чертежѣ эти линіи не нанесены) должны пересѣкаться въ точкѣ, лежащей на вертикали точки  $C'$ ; наконецъ 6 участковъ линіи вліянія для  $O$  опредѣляются изъ соотвѣтствующихъ участковъ линіи вліянія для  $X$  согласно способу, описанному на стр. 86 (ср. также фиг. 179).

Способъ построеній на фиг. 183 безусловно нагляденъ и имѣетъ много преимуществъ. На основаніи расчетовъ, произведен-

ныхъ лично авторомъ и слушателями его лекцій, необходимо придерживаться слѣдующихъ правилъ.

Обыкновенно построение линій вліянія для верхняго пояса, нижняго пояса, для раскосовъ и стоекъ распредѣляютъ на 4 листахъ \*). На каждомъ листѣ строятъ по способу, примѣненному къ фиг. 183 в, линіи вліянія для требуемыхъ напряженій при помощи единственной линіи вліянія для количества  $X$ , а затѣмъ каждую линію вліянія относятъ къ *отдѣльной прямолинейной нулевой оси*, причемъ ординаты берутъ съ готоваго чертежа, фиг. 183 в. Потомъ находимъ самое опасное положеніе поѣзда (путемъ попытокъ) и возлѣ каждой линіи вліянія записываемъ слѣдующія значенія:



Фиг. 184.

1) Множитель (который будемъ впредь обозначать буквой  $\mu$ ),

2) значенія  $\sum P\eta$ , соответствующія грузамъ  $P$ ; знаки  $+$  или  $-$  надъ знакомъ  $\sum$  указываютъ вліяніе грузовъ  $P$ , лежащихъ на положительномъ или отрицательномъ протяженіи линіи вліянія,

3) тѣ величины, которыми опредѣляется вліяніе постоянной нагрузки. При неравныхъ панеляхъ надо вычислить величины положительныхъ и отрицательныхъ площадей вліянія  $F^+$  и  $F^-$  и опредѣлить напряжения  $S_g$ , зависящія отъ постоянной нагрузки ( $g$  на единицу длины) посредствомъ формулы  $S_g = g(F^+ - F^-)$ , причемъ  $+$  и  $-$ , стоящія подъ  $F$ , означаютъ не знаки, а только указатели \*\*). Если всѣ панели имѣютъ одну и ту же длину  $\lambda$ , то слѣдуетъ рассчитывать по узловымъ грузамъ. Для этого опредѣляемъ сумму всѣхъ положительныхъ ординатъ, измѣренныхъ подъ узлами, и сумму всѣхъ отрицательныхъ ординатъ; обозначимъ эти суммы просто знаками  $\Sigma$  и  $\Sigma$  \*\*\*)) и напомнимъ окончательно  $S_g = g\lambda (\Sigma^+ - \Sigma^-)$ .

\*) Упрощенія, которыя получаются изъ изслѣдованій № 72, будутъ указаны при расчетѣ важнѣйшихъ фермъ въ отдѣлѣ II (выпуски VIII и IX).

\*\*) Въ томѣ I (II выпускъ) въ № 60 эти площади вліянія были обозначены буквами  $\delta_2$  и  $\delta_1$ , теперь же будемъ обозначать ихъ черезъ  $F^+$  и  $F^-$ .

\*\*\*)) Въ I томѣ (II выпускъ) въ № 60 эти суммы были обозначены буквами  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$ .



Точно также можно построить наглядныя діаграммы напряжений, которыя легко провѣряются.

Напишемъ формулы, служащія для вычисленія предѣльных значений напряжений, принимая во вниманіе вліяніе нагрѣванія или охлажденія ( $S_i = \pm S' X_i = \pm \mu X_i$ ):

$$(1) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[ + \Sigma P \eta + g (F - \bar{F}) + X_i \right] \\ \min S = \mu \left[ - \Sigma P \eta + g (\bar{F} - F) - X_i \right]; \end{cases}$$

а при равныхъ панеляхъ:

$$(2) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[ + \Sigma P \eta + g \lambda (\Sigma - \bar{\Sigma}) + X_i \right] \\ \min S = \mu \left[ - \Sigma P \eta + g \lambda (\bar{\Sigma} - \Sigma) - X_i \right]. \end{cases}$$

Надо замѣтить, что количества:  $\mu$ ,  $\Sigma P \eta$ ,  $\Sigma P \eta$ ,  $F$ ,  $\bar{F}$ ,  $\Sigma$ ,  $\bar{\Sigma}$  представляютъ абсолютныя величины.

Подобнымъ же путемъ поступаютъ и при расчетѣ сложной статически неопредѣлимой рѣшетки. Масштабъ для линий вліяній, вообще различный для напряжений въ поясахъ и напряжений въ промежуточныхъ стержняхъ, надо выбирать не слишкомъ большимъ, чтобы имѣть возможность складывать при помощи циркуля нѣсколько ординатъ. При опредѣленіи  $\Sigma P \eta$  и  $\Sigma P \eta$  надо обращать вниманіе на правила, приведенныя въ № 61 I тома (II выпускъ).

При равномерно распределенной временной нагрузкѣ  $p$  получимъ:

$$(3) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[ q F - g \bar{F} + X_i \right] \\ \min S = \mu \left[ g F - q \bar{F} - X_i \right], \end{cases}$$

(причемъ  $q = g + p$ ), а при равныхъ панеляхъ: \*)

$$(4) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[ q \lambda \Sigma - g \lambda \bar{\Sigma} + X_i \right] \\ \min S = \mu \left[ g \lambda \Sigma - q \lambda \bar{\Sigma} - X_i \right]. \end{cases}$$

Надо замѣтить, что иногда, когда  $X_g$  уже найдено, вліяніе постоянной нагрузки на количество  $S_g$  опредѣляется проще при помощи отдѣльной діаграммы Кремоны; въ случаѣ временной равномерно распределенной нагрузки необходимо воспользоваться слѣдующей зависимостью, которая примѣнима одинаково ко всѣмъ фер-

\*) См. № 60, I томъ (II выпускъ).

мамъ съ неизмѣннымъ сочлененіемъ и неизмѣннымъ родомъ опоръ (см. № 5 — выпускъ VI).

Напряжение  $_{max}S$  получается при загрузкѣ  $q$  единицами положительныхъ участковъ и  $g$  единицами отрицательныхъ участковъ; напряжение  $_{min}S$  получается при загрузкѣ  $g$  единицами положительныхъ участковъ и  $q$  единицами отрицательныхъ участковъ. Сопоставленіе обѣихъ нагрузокъ приводитъ къ полной нагрузкѣ фермы  $q + g$ . Если написать напряжение  $S_g$  въ такой формѣ

$$(5) \quad S_g = gC_0,$$

гдѣ  $C_0$  означаетъ величину  $S_g$  для случая  $g = 1$ , то получимъ:

$$(6) \quad _{max}S + _{min}S = (q + g)C_0,$$

т. е. послѣ вычисленія одного предѣльнаго значенія, другое находится просто.

Если вычисленіе величинъ  $_{max}S$  проще, чѣмъ величинъ  $_{min}S$ , то вліяніе нагрузки  $p$  опредѣляется въ такой формѣ

$$(7) \quad _{max}S_p = pC_1$$

тогда получимъ

$$(8) \quad \begin{cases} _{max}S = gC_0 + pC_1 \\ _{min}S = gC_0 - pC_1 \end{cases}$$

Провѣрка:  $_{max}S + _{min}S = (g + g)C_0.$

Если же вычисленіе количества  $_{min}S$  проще, тогда напомнимъ:

$$(9) \quad _{min}S_p = -pC_2$$

и получимъ:

$$(10) \quad \begin{cases} _{min}S = gC_0 - pC_2 \\ _{max}S = gC_0 + pC_2. \end{cases}$$

Формулы (6) до (10) имѣютъ значеніе не только для напряженій, но и для составляющихъ по неподвижнымъ направленіямъ реакцій опоръ, для изгибающихъ моментовъ и для перерѣзывающихъ силъ; во многихъ случаяхъ съ помощью этихъ формулъ получаютъ значительныя сокращенія въ вычисленіяхъ. Надо замѣтить, что предѣльныя значенія  $S$ , полученные по формуламъ (8) и (10), должны быть увеличены на количество  $S_t$ , зависящее отъ измѣненія температуры.



*е. Предположенія для упрощенія расчета вновь проектируемыхъ статически неопредѣлимыхъ фермъ.*

**74.**—Точный расчетъ вновь проектируемыхъ рѣшетокъ усложняется тѣмъ обстоятельствомъ, что величины  $X$  зависятъ отъ предварительно неизвѣстныхъ поперечныхъ сѣченій стержней, или, когда имѣемъ дѣло только съ вліяніемъ нагрузки, то отъ взаимныхъ отношеній этихъ сѣченій. Поэтому вначалѣ принимаютъ обыкновенно нѣкоторыя приближенныя значенія для поперечныхъ сѣченій, которые послѣ точнаго изслѣдованія измѣняютъ \*). При значительныхъ уклоненіяхъ между вычисленными и предварительно принятыми сѣченіями необходимо повторить весь расчетъ.

Во всѣхъ важныхъ случаяхъ возможны упрощенія, которые не будутъ вліять на окончательный результатъ. Эти упрощенія заключаются въ возможности пренебречь при вычисленіи величинъ  $X$  деформациями промежуточныхъ стержней статически опредѣлимой главной системы и принять для стержней одного пояса или обоеихъ поясовъ равныя сѣченія.

Напр. имѣемъ рѣшетчатую арку, рассмотрѣнную въ № 57. При опредѣленіи  $X$  необходимо построить діаграмму перемѣщеній Вилліо для состоянія  $X = -1$ , которому соотвѣтствуютъ измѣненія длины  $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$ . При этомъ для каждаго промежуточнаго стержня

положимъ сначала  $(\Delta s)' = 0$ , а это значитъ, что въ діаграммѣ перемѣщеній промежуточному стержню  $ik$ , соединяющему два узла  $i$  и  $k$ , будетъ соотвѣтствовать прямая  $i'k'$ , перпендикулярная къ  $ik$ ; затѣмъ для всѣхъ стержней поясовъ примемъ одно и то же

значеніе  $\frac{1}{EF}$ . Принявъ для величинъ  $(\Delta s)' = S's$  (вмѣсто  $\Delta s' = \frac{S's}{EF}$ ), получимъ діаграмму перемѣщеній, гдѣ перемѣщенія узловъ

будутъ увеличены въ  $EF$ —разъ; уравненіе же  $X = \frac{\sum P_m \delta'_m}{\delta'}$  остается безъ измѣненій, потому что въ числитель и въ знаменатель введены перемѣщенія  $\delta'_m$  и  $\delta'$ , увеличенныя въ одинаковое число разъ. Формулу  $X_i = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta'}$ , соотвѣтствующую равномерному возвы-

шенію температуры, надо замѣнить формулой  $X_i = \frac{\varepsilon EF t l}{\delta'}$ . Большею частью панели берутся приблизительно одинаковыми, поэтому значеніе  $\frac{s}{EF}$  можно принять равнымъ для всѣхъ стержней поясовъ и

\*) Проф. Вейраухъ рекомендуетъ получать эти значенія изъ предварительнаго расчета надъ такой же статически опредѣлимой фермой. Напр. для двухшарнирной арки придется произвести предварительный подсчетъ сѣченій, введя средній шарниръ. См. Weyrauch, Die elastischen Bogenträger. 1897. München. (стр. 180).



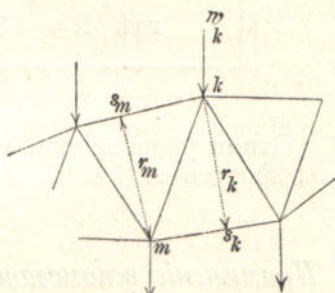
расчетъ вести, пользуясь равенствомъ  $(\Delta s)' = S'$ . Вліяніе температуры будетъ теперь равняться  $X_t = \frac{\varepsilon EF \ell}{s \delta'}$ .

Если желаемъ ввести для верхняго и нижняго поясовъ различныя сѣченія  $F_o$  и  $F_u$  и для стержня верхняго пояса принять значеніе  $(\Delta s)' = S'$ , то для стержня нижняго пояса мы должны принять значеніе  $(\Delta s)' = S' \frac{F_o}{F_u}$  и положить  $X_t = \frac{\varepsilon EF_o \ell}{s \delta'}$ . Остается упомянуть только, что вообще подъ количествами  $F_o$  и  $F_u$  подразумѣваемъ не среднія поперечныя сѣченія верхняго или нижняго поясовъ, а подъ  $s$  не среднюю длину стержней, а тѣ значенія для опредѣленныхъ стержней, размѣры и измѣненія длины которыхъ имѣютъ самое значительное вліяніе на деформацию рѣшетки. Такъ напр., если разсматриваемая арочная ферма имѣетъ въ замкѣ значительно меньшую высоту, чѣмъ въ опорахъ, то для  $F_o$ ,  $F_u$  и  $s$  надо выбрать поперечныя сѣченія и длину стержней поясовъ въ замкѣ арки.

Другія предположенія будутъ приведены ниже при изслѣдованіи важнѣйшихъ рѣшетокъ, здѣсь же только упомянемъ, что въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ пользоваться линіями вліянія, потому что этотъ способъ имѣетъ больше преимуществъ, хотя бы потому, что при вычисленіи значеній  $w$  позволяетъ указать на особенное значеніе нѣкоторыхъ стержней. Этотъ способъ по изслѣдованіямъ автора имѣетъ особенныя преимущества тогда, когда разсматриваемъ грузы одного направленія, напр. когда имѣемъ дѣло съ вертикальными грузами.

Обыкновенно грузы бываютъ приложены къ узламъ статически опредѣлимой главной системы, и эта главная система состоитъ болѣею частью изъ треугольной сѣти. Если желаемъ примѣнить уравненія (V) (стр. 68), то сначала надо опредѣлить линіи прогибовъ ( $\delta'$ ,  $\delta''$  . . .), соотвѣтствующія состояніямъ нагрузки  $X' = -1$ ,  $X'' = -1$ , . . .

Обозначимъ черезъ  $M'_m$  моментъ относительно узла  $m$ , вызываемый причиной  $X' = -1$ , тогда для стержня пояса  $s_m$ , противолѣжащаго узлу  $m$ , получимъ напряженіе  $S'_m = \mp \frac{M'_m}{r_m}$ , гдѣ  $r_m$  означаетъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ  $m$  на  $s_m$ . Верхній знакъ относится къ верхнему, нижній знакъ къ нижнему поясу. Грузъ  $w'_m$  узла  $m$  опредѣлится по № 47:



Фиг. 185.

$$(I) \quad w'_m = \mp \frac{(\Delta s_m)'}{r_m} = \mp \frac{S'_m s_m}{EF_m r_m} = \mp \frac{M'_m s_m}{EF_m r_m^2};$$

точно такимъ же путемъ получимъ выраженія для грузовъ для состояній  $X'' = -1$ ,  $X''' = -1$ , . . . :

$$w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{EF_m r_m^2};$$

$$w_m''' = \frac{M_m''' s_m}{EF_m r_m^2}; \dots$$



Если  $E$  для всѣхъ стержней одно и то же, то количества  $w'$ ,  $w''$ , . . . надо умножить на  $E$ . Кроме того бываетъ полезно произвести еще умноженіе на величину  $F_c$ , означающую предварительно произвольное поперечное сѣченіе (которое должно быть принято одинаковымъ для всѣхъ количествъ  $w$ ); тогда получимъ:

$$(2) \quad w' = \frac{M'_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad w'' = \frac{M''_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad \dots$$

Положивъ эти грузы въ основаніе расчета ординатъ  $\delta'$ ,  $\delta''$  . . . линий прогибовъ, соответствующихъ состояніямъ  $X' = -1$ ,  $X'' = -1$ , . . . , мы должны всѣ члены уравненій V (за исключеніемъ членовъ  $\Sigma P_m \delta'_m$ ,  $\Sigma P_m \delta''_m$ , . . .) умножить на  $EF_c$ . Замѣтимъ также что дальнѣйшее умноженіе на  $\nu$  требуется только тогда, когда значенія  $w'$ ,  $w''$ , . . . были умножены по какой нибудь причинѣ на  $\nu$  \*).

Примѣняя эти правила, напр., къ простой статически неопредѣлимой рѣшеткѣ, мы получимъ для вычисленія  $X$  слѣдующее уравненіе:

$$EF_c L' = \Sigma P_m \delta'_m - X \Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} + EF_c \Sigma \varepsilon t S' s,$$

откуда выведемъ слѣдующія значенія, опредѣляющія вліяніе груза  $P$ , вліяніе измѣненій температуры и вліяніе перемѣщеній опоръ:

$$(3) \quad \begin{cases} X = P_m \frac{\delta'_m}{\aleph}; & X_t = \frac{\varepsilon EF_c \Sigma S' t s}{\aleph}; & \Delta X = \frac{-EF_c L}{\aleph}, \\ \text{гдѣ } \aleph = \Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}. \end{cases}$$

Этими уравненіями (2) и (3) мы будемъ часто пользоваться въ дальнѣйшихъ отдѣлахъ.

#### ѣ. Примѣненіе вспомогательнаго шарнирнаго многоугольника, составленнаго изъ жесткихъ звеньевъ.

**75.**—Пусть  $X$  означаетъ напряженіе въ стержнѣ  $ik$ , который мы считаемъ за лишній, т. е. по удаленіи котораго  $z$ —разъ стати-

\*) Если рѣшетка на фиг. 185 была бы фермой съ параллельными поясами высотой  $h$  и если всѣ стержни поясовъ имѣли бы равную длину  $\lambda$ , то получили бы  $\frac{s_m}{r_m^2} = \frac{\lambda}{h^2}$ . Тогда грузы  $w'$ ,  $w''$ , . . . можно было бы умножить на  $\nu = \frac{h^2}{\lambda}$  и получить болѣе простыя выраженія  $w' = M'_m \frac{F_c}{F_m}$  и т. д.

чески неопредѣлимая рѣшетка не теряетъ своей жесткости; всѣ напряжения напишемъ въ такой формѣ

$$(1) \quad S = \varepsilon_0 - \varepsilon' X,$$

гдѣ  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon'$  означаютъ количества  $S$ , соотвѣтствующія состоянiямъ  $X=0$  и  $X=-1$ ; тогда уравненiе работы для состоянiя  $X=-1$  напишется такъ:

$$(2) \quad 0 = \Sigma \varepsilon' \Delta s,$$

причемъ предполагается, что движенiя опоръ исключены и что сумма въ уравненii (2) включаетъ также стержень, которому соотвѣтствуетъ  $\varepsilon' = -1$ .

Подставимъ

$$\Delta s = S \rho = (\varepsilon_0 - \varepsilon' \lambda) \rho,$$

гдѣ  $\rho = s : EF$ , и примемъ во вниманiе уравненiе (30) (№ 13 — выпускъ VI), тогда получимъ выраженiе:

$$(3) \quad X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\Sigma \varepsilon'^2 \rho},$$

гдѣ  $\delta'_m$  означаетъ перемѣщенiе точки приложенiя  $m$  груза  $P_m$  по направленiю и теченiю силы  $P_m$ , когда на  $(z-1)$  — разѣ статически неопредѣлимую рѣшетку дѣйствуетъ только причина  $X = -1$  \*).

На основанii этихъ правилъ линiю влiянiя для каждаго напряженiя, а также и для каждаго сопротивленiя опорѣ, дѣйствующаго по неподвижному направленiю, можно разсматривать какъ *линию прогибовъ* (множитель для которой въ разсматриваемомъ случаѣ  $= 1 : \Sigma \varepsilon'^2 \rho$ ); къ этому надо добавить только одно ограниченiе, чтобъ рѣшетка не теряла ни своей жесткости отъ устраненiя даннаго стержня, ни устойчивости отъ уничтоженiя даннаго сопротивленiя опоры \*\*). Надо замѣтить впрочемъ, что примѣненiе уравненiя (3) къ отысканiю  $X$  — линiи вообще не пригодно, такъ какъ оно требуетъ построенiя линiи прогибовъ для  $(z-1)$  — разѣ статически неопредѣлимой рѣшетки, находящейся подѣ дѣйствiемъ причины  $X = -1$ ; такимъ образомъ примѣненiе этого уравненiя не можетъ замѣнить прежде описанный способъ: опредѣлить линiи влiянiя для  $z$  надлежаще выбранныхъ величинъ  $X'$ ,  $X''$ , . . . съ помощью  $z$  линiй прогибовъ *статически опредѣлимой* рѣшетки и найти линiи влiянiя для остальныхъ величинъ посредствомъ условiй равновѣсiя.

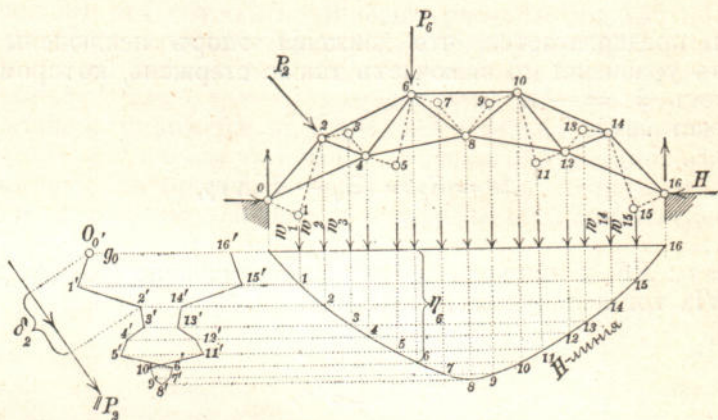
\* Уравненiе 3 имѣетъ форму, одинаковую съ формой уравненiя  $X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\Sigma S'^2 \rho}$ , выведеннаго для простой статически неопредѣлимой рѣшетки; ср.

стр. 69 и 72.

\*\* Ср. № 61.



Впрочемъ, разсмотрѣніе линій вліянія какъ линій прогибовъ, предполагаемое уравненіемъ (3), имѣеть нѣкоторое преимущество, потому что оно позволяетъ непосредственное примѣненіе условий зависимости между полными діаграммами перемѣщеній и линіями прогибовъ, о которой говорилось въ № 51; эти правила даютъ намъ возможность воспользоваться примѣненіемъ способа вспомогательнаго шарнирнаго многоугольника (см. № 52), чтобъ послѣ построенія линій вліяній для грузовъ одного постоянного направленія быстро вычертить тѣ фигуры, которыя могутъ опредѣлить дѣйствіе грузовъ  $P$  иного направленія.

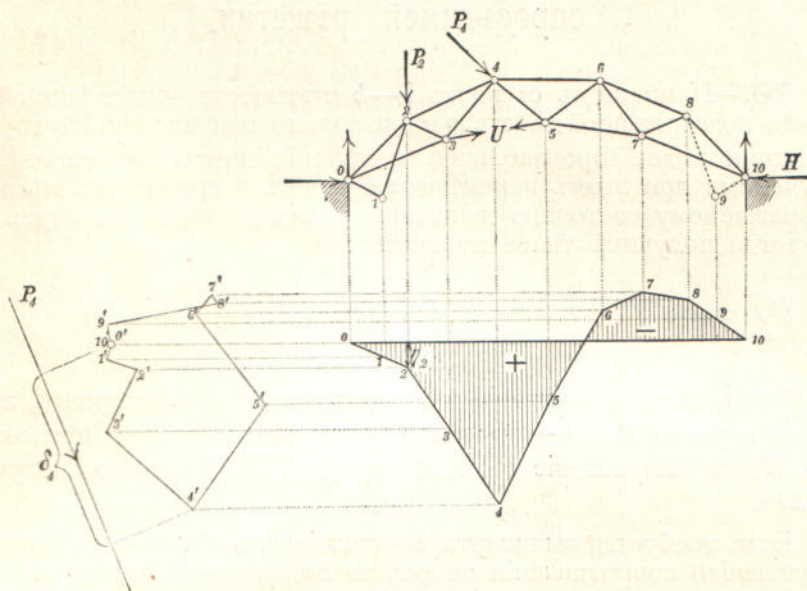


Фиг. 186.

Два примѣра будутъ исполнѣны достаточны чтобы объяснить этотъ способъ. На фиг. 186 требуется опредѣлить горизонтальную составляющую реакціи правой опоры  $H$  арочной фермы съ неподвижными опорными шарнирами. Присоединимъ узлы 1, 3, 5, 7, . . . 15 и построимъ по одному изъ извѣстныхъ способовъ линію вліянія для вертикальной нагрузки, выводя ее изъ линіи прогибовъ, соотвѣтствующей состоянію  $H = -1$ , для шарнирнаго многоугольника  $0-1-2-3-4-\dots-16$  съ жесткими звеньями; ради большей наглядности отнесемъ эту линію къ горизонтальной прямой. Проведемъ затѣмъ черезъ точки  $0, 1, 2, \dots, N$  — линіи горизонтальныя прямыя  $g_0, g_1, g_2, \dots$ , выберемъ на линіи  $g_0$  произвольный полюсъ  $O \equiv o'$ , и начиная съ  $o'$ , проведемъ многоугольникъ, стороны котораго будутъ перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ сторонамъ шарнирнаго многоугольника  $0, 1, 2, 3, \dots, 16$ , а углы будутъ лежать на прямыхъ  $g_1, g_2, g_3, \dots$ ; тогда полюсные лучи  $01', 02', 03', \dots$  будутъ пропорціональны перемѣщеніямъ точекъ  $1', 2', 3', \dots$  отъ состоянія нагрузки  $H = -1$ , направленія же ихъ (а также и теченія) будутъ совпадать съ направленіями перемѣщеній. Если, напр., къ узлу 2 приложенъ грузъ  $P_2$  и  $\delta_2$  есть проекція луча  $02'$  на направленіе  $P_2$ , то вліяніе  $P_2$  на  $H$  выразится формулой:

$$H = P_0 \delta_0.$$

На фиг. 187 построена линия вліянія для напряженія  $U$  въ стержнѣ нижняго пояса такой же арочной фермы; причемъ мы считаемъ, что при расчетѣ фермы принята во вниманіе жесткость промежуточныхъ стержней. При опредѣленіи  $H$ —линіи, соответствующей вертикальной нагрузкѣ, и при построеніи  $U$ —линии, получаемой по № 73 изъ  $H$ —линии, требуется присоединить только



Фиг. 187.

2 узла (1 и 9) и четыре жесткихъ стержня\*). Многоугольникъ  $o' 1' 2' 3' \dots 9' 10'$  при тщательномъ построеніи долженъ сомкнуться, потому что этотъ многоугольникъ можно разсматривать какъ діаграмму перемѣщеній для состоянія  $U = -1$ , а для этого состоянія точки  $o$  и  $10$  будутъ неподвижны. Грузы  $P_2$  и  $P_4$  (фиг. 187) вызовутъ напряженіе

$$U = \mu (P_2 \eta_2 + P_4 \delta_4),$$

гдѣ  $\mu$  — есть множитель для  $U$ —линии.

\*) Когда имѣются вертикальныя стойки, то надо принять во вниманіе рѣшеніе задачи 4 на стр. 41.



## § 6.

## Примѣненіе теоріи деформаций къ расчету статически опредѣлимой рѣшетки.

**76.**—Припишемъ стержню  $i-k$  статически опредѣлимой рѣшеткѣ, подверженной дѣйствию произвольно направленныхъ грузовъ  $P$ , весьма малое произвольное измѣненіе длины  $\Delta s$ ; опредѣлимъ полученныя при этомъ перемѣщенія узловъ и примѣнимъ къ этому воображаемому состоянію движенія законъ возможныхъ перемѣщеній, тогда получимъ такое равенство:

$$(I) \quad S \overline{\Delta s} = \Sigma P \bar{\delta},$$

гдѣ  $S$  означаетъ напряженіе въ рассматриваемомъ стержнѣ, вызываемое грузами  $P$ , а  $\bar{\delta}$  — проекцію перемѣщенія точки приложенія груза  $P$  на направленіе  $P$ . Если выбрать  $\overline{\Delta s} = 1$ , \*) то получимъ  $S = \Sigma P \bar{\delta}$ .

Если требуется вычислить составляющую  $C$  (по неподвижному направленію) сопротивленія опоры, то подвижность рѣшетки достигается уничтоженіемъ условія закрѣпленія опоры, соотвѣтствующаго этому сопротивленію. Можно также вообразить, что рассматриваемая опора соединена при помощи стержня, имѣющаго направленіе  $C$ , съ неподвижной точкой, лежащей внѣ рѣшетки, и что этому *опорному стержню* приписано произвольное весьма малое измѣненіе длины; тогда увидимъ, что всѣ разрѣшаемыя задачи принимаютъ одну и ту же форму.

Уравненіе (I) представляетъ частный случай формулы (13), полученной во введеніи въ № 7 (выпускъ VI); это уравненіе было выведено въ I томѣ, но въ другой формѣ кинематическимъ путемъ изъ общаго уравненія моментовъ \*\*). При примѣненіи этого уравненія необходимо найти состояніе скоростей или перемѣщеній той кинематической цѣпи, въ которую обращается статически опредѣлимая рѣшетка при удаленіи стержня  $ik$ . Эта задача разрѣшена была въ I томѣ при помощи слѣдующихъ вспомогательныхъ средствъ:

1). Примѣненіе скоростей, повернутыхъ на  $90^\circ$  (вмѣсто нихъ можно ввести имъ пропорціональныя весьма малыя перемѣщенія, предполагая, что все движеніе совершается въ тотъ же промежутокъ времени).

\*) Здѣсь 1 означаетъ единицу весьма малыхъ перемѣщеній, представленныхъ въ весьма большемъ увеличеніи.

\*\*) Соотвѣтствие этого уравненія моментовъ съ закономъ возможныхъ перемѣщеній было выражено въ № 141 (I томъ, выпускъ III).

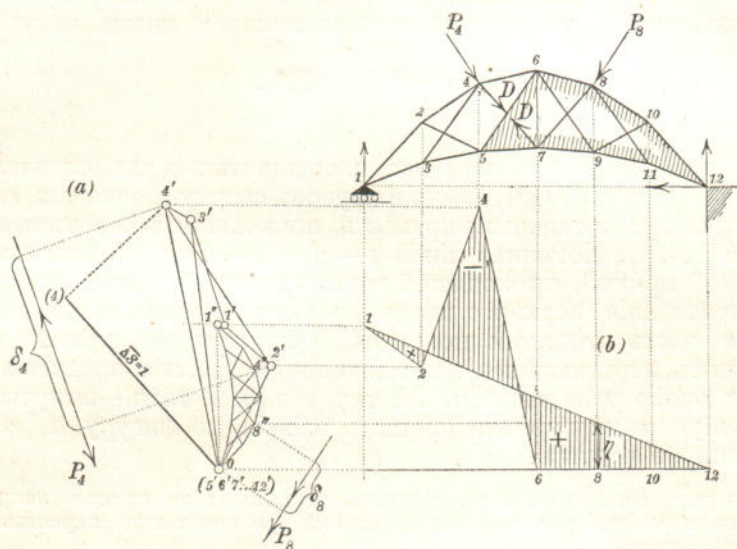
## 2) Определе́ніе полюсовъ.

Къ этому можно добавить новыя вспомогательныя средства:

- a) Диаграмма перемѣщений по Вилліо (по § 1 выпускъ VI).
- b) Способъ шарнирнаго многоугольника (по § 2—выпускъ VI—съ особенными разъясненіями въ №№ 52 и 75.)
- c) Верево́чный многоугольникъ (по § 3).

Покажемъ примѣненіе этого способа на нѣсколькихъ примѣрахъ.

**Задача 1.** Пусть на статически опредѣлимую рѣшетку, фиг. 188, дѣйствуютъ силы  $P$ , произвольно направленные. Требуется отыскать напряженіе  $D$  въ наклонномъ стержнѣ 4—7.



Фиг. 188.

Обратимъ жесткую рѣшетку путемъ устраненія стержня 4—7 въ кинематическую цѣпь. Примемъ жесткую часть цѣпи (на фигурѣ заштриховано) за неподвижную часть, припишемъ точкѣ 4 въ направленіи 7—4 перемѣщеніе  $\Delta s = 1$  и опредѣлимъ перемѣщенія точекъ 4, 3, 2, 1 по способу Вилліо. Для этого отложимъ отъ взятаго полюса  $O$  отрѣзокъ  $O(4) = \Delta s = 1$ , параллельный стержню 7—4, проведемъ  $6'—4'$  \*)  $\perp 6—4$ , затѣмъ  $(4) 4' \perp O(4)$ ; тогда полюсный лучъ  $O 4'$  представитъ по величинѣ, направленію и теченію перемѣщеніе точки 4. Затѣмъ наносимъ

точку  $3'$  посредствомъ  $4'—3' \perp 4—3$  и  $5'—3' \perp 5—3$ ,  
 "  $2'$  " "  $4'—2' \perp 4—2$  и  $5'—2' \perp 5—2$ ,  
 "  $1'$  " "  $2'—1' \perp 2—1$  и  $3'—1' \perp 3—1$ .

\*) Точки  $5', 6', 7', \dots 12'$  соответствуютъ неподвижнымъ узламъ, поэтому онѣ совпадутъ съ полюсомъ  $O$ .



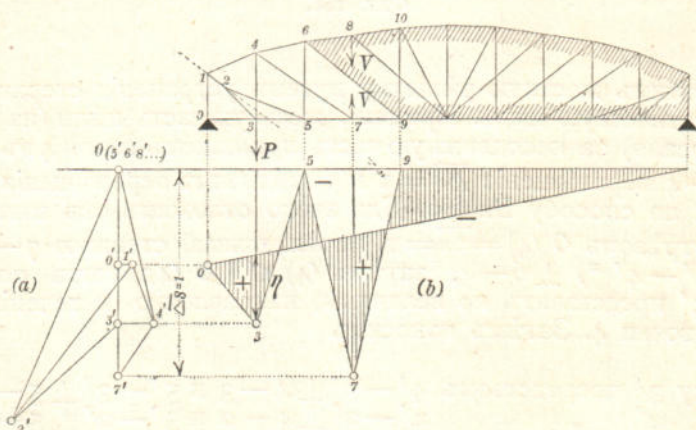
Наконецъ повернемъ рѣшетку вокругъ неподвижнаго шарнира 12 такъ, чтобъ удовлетворить условію опорнаго закрѣпленія у узла 1. Полюсные лучи по направленію къ  $O$  фигуры 1'' 2'' 3'' . . . , подобной фигурѣ рѣшетки, представляютъ (по № 33—выпускъ VI) перемѣщенія узловъ отъ этого втораго движенія; фигура же эта опредѣляется слѣдующими условіями: 12'' должно совпасть съ 12', потому что 12 остается въ покоѣ; 12''—1'' должно быть перпендикулярно 12—1 и 1'' должно лежать на горизонтальной прямой, проходящей черезъ 1'', потому что шарниръ 1 перемѣщается по горизонтальному направленію.

Если требуется знать вліяніе грузовъ  $P_4$  и  $P_8$ , то опредѣляемъ проекціи  $\delta_4$  и  $\delta_8$  перемѣщеній 4''—4' и 8''—8' на направленія  $P_4$  и соответственно  $P_8$ ; тогда, принимая во вниманіе знаки, получимъ

$$D = -P_4\delta_4 + P_8\delta_8.$$

На фиг. 188 в построена еще площадь вліянія для вертикальнаго направленія нагрузки при дѣйствіи грузовъ сверху. Точки 1, 2, 4, 6, . . . лежатъ на горизонтальныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точки 1', 2', 4', 6', . . . . Ломанная линия 1—2—4—6, отнесенная къ горизонтальной прямой, проходящей черезъ точку  $O$ , даетъ вертикальныя перемѣщенія верхняго пояса въ томъ случаѣ, когда заштрихованная часть рѣшетки покоится; ординаты же прямой 1—12 доставляютъ вертикальныя перемѣщенія вслѣдствіе вращенія всей рѣшетки около узла 12. (См. № 147 и 148, I томъ—выпускъ III). Если требуется только эта площадь вліянія, то фигуру 1'' 2'' . . . 12'' можно не чертить.

Для упражненій можно изслѣдовать подобнымъ же путемъ напряженія въ поясахъ и напряженіе въ средней стойкѣ. Можно также переставить на фиг. 188 обѣ опоры.



Фиг. 189.

**Задача 2.** Требуется построить линію вліянія, соотвѣтствующую вертикальной нагрузкѣ, для напряженія  $V$  въ стержнѣ 7—8 статически опредѣлимой двойной рѣшетки, фиг. 189.

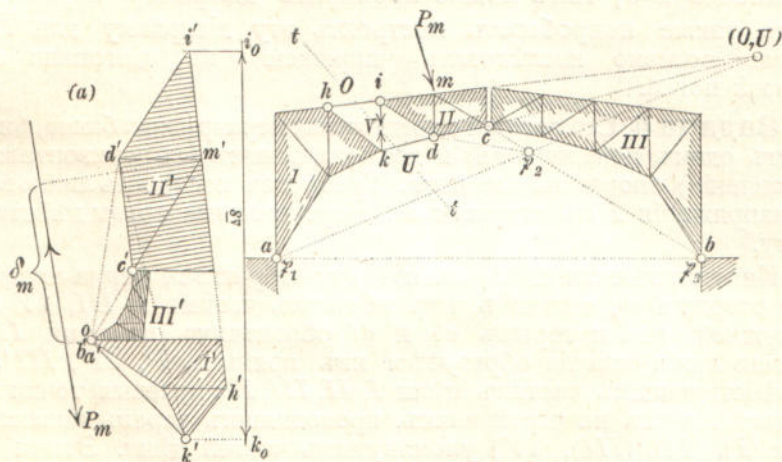
Жесткая заштрихованная часть рѣшетки считается сначала неподвижной; припишемъ стержню 8—7 изменение длины  $\Delta s = 1$ ; это изменение вызоветъ вертикальное перемѣщение узла 7 на  $\overline{O}7' = \Delta s = 1$ , потому что стержень 7—9 имѣетъ вертикальное направление. Точки  $5', 4', 3', 2', 1', 0'$  диаграммы перемѣщений опредѣляются посредствомъ такихъ условий.

$$\begin{array}{l} 6' - 5' \perp 6 - 5 \text{ и } 7' - 5' \perp 7 - 5 \\ 6' - 4' \perp 6 - 4 \text{ и } 7' - 4' \perp 7 - 4 \\ 5' - 3' \perp 5 - 3 \text{ и } 4' - 3' \perp 4 - 3 \\ 5' - 2' \perp 5 - 2 \text{ и } 3' - 2' \perp 3 - 2 \\ 2' - 1' \perp 2 - 1 \text{ и } 4' - 1' \perp 4 - 1 \\ 1' - 0' \perp 1 - 0 \text{ и } 3' - 0' \perp 3 - 0. \end{array}$$

Наконецъ строимъ площадь прогибовъ, заштрихованную на фиг. 189 б; изъ нея получимъ  $V = \Sigma P\eta$ . При наклонныхъ силахъ требуется построение фигуры  $0'' 1'' 2'' 3'' \dots$  (какъ и въ первой задачѣ). Тогда необходимо принять во вниманіе положеніе подвижной опоры.

Полезно произвести изслѣдованіе для діагонали и для стержня пояса. При расчетѣ всей рѣшетки можно принять во вниманіе зависимость между напряжениями, которая всегда упрощаетъ рѣшеніе задачи. См. № 148, I томъ—(выпускъ III), а также № 72 настоящаго выпуска.

**Задача 3.** Требуется опредѣлить напряжение  $V$  въ стержнѣ  $i-k$  трехшарнирной арки, нагруженной произвольно направленными силами  $P_m$ , фиг. 190. Полость вращенія кинематической цѣпи,



Фиг. 190.

въ которую обращается рѣшетка по удаленіи стержня  $i-k$ , опредѣляется въ данномъ случаѣ весьма быстро, поэтому найти перемѣщенія, принимая во вниманіе дѣйствительныя условія опорныхъ закрѣпленій, не представляетъ никакихъ затрудненій. Эта цѣпь состоитъ изъ трехъ жесткихъ фигуръ I, II, III и изъ стержней



поясовъ  $O$  и  $U$ . Полюсы  $\mathfrak{P}_1$  и  $\mathfrak{P}_3$  фигуръ I и III совпадаютъ съ опорными шарнирами  $a$  и  $b$ , а полюсъ  $\mathfrak{P}_2$  фигуры II (по № 149, I томъ, выпускъ III) будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія прямой  $bc$  съ прямой, соединяющей шарниръ  $a$  съ точкой пересѣченія стержней поясовъ  $O$  и  $U$ .

Припишемъ теперь точкѣ  $d$  фигуры II произвольное по величинѣ перемѣщеніе, которое должно быть перпендикулярно къ прямой, соединяющей точку  $d$  съ полюсомъ  $\mathfrak{P}_2$  фигуры II; на фиг. 190 а это перемѣщеніе представлено лучемъ  $Od'$ ; тогда точка  $m'$ , соотвѣтствующая какой нибудь другой точкѣ  $m$  фигуры II, получится, проводя  $Om' \perp \mathfrak{P}_2 m$  и  $d'm' \perp dm$ , чѣмъ опредѣляется фигура II', подобная фигурѣ II. Фигура III' опредѣлится теперь точкой  $c'$  и точкой  $b'$ , совпадающей съ точкой  $O$ , затѣмъ фигура I' опредѣляется точкой  $a'$ , совпадающей съ точкой  $O$  и условіями:  $a'k' \perp ak$ ,  $d'k' \perp dk$ ; правильность чертежа можетъ быть провѣрена условіемъ  $i'h' \perp ih$ . Проекція  $i_0 k_0$  линіи  $i'k'$  на направленіе  $V$  опредѣляетъ взаимное перемѣщеніе  $\Delta s$  пары точекъ  $i$ ,  $k$ ; это перемѣщеніе на фиг. 190 а положительно, потому что  $i_0$  лежитъ выше  $k_0$ , а  $i$ —выше  $k$ ; поэтому между  $V$  и  $P$  существуетъ такая зависимость:  $+V\Delta s = \Sigma P\delta$ , такъ что для вліянія груза  $P_m$  (которому соотвѣтствуетъ отрицательное  $\delta_m$ ) получимъ значеніе

$$V = -P_m \frac{\delta_m}{\Delta s}.$$

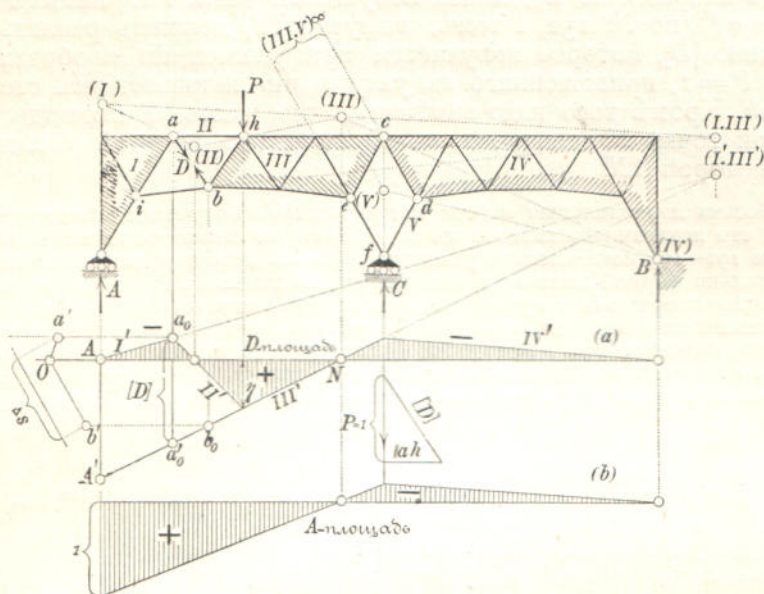
Полезно будетъ опредѣлить еще полюсы вращенія обоихъ стержней  $O$  и  $U$ , чѣмъ можно провѣрить діаграмму перемѣщеній; можно также попробовать построить эту діаграмму для  $\Delta s = 1$ . Затѣмъ полезно изслѣдовать напряженія въ діагонали и въ стержнѣ пояса.

**Задача 4.** Статически опредѣлимая неразрѣзная балка, фиг. 191, имѣетъ одинъ неподвижный и два подвижныхъ (въ горизонтальномъ направленіи) опорныхъ шарнира. Требуется построить линію вліянія для напряженія  $D$  въ стержнѣ  $ab$ . Вертикальные грузы дѣйствуютъ сверху.

Кинематическая цѣпь, въ которую обратится ферма послѣ удаленія стержня  $ab$ , состоитъ изъ жесткихъ частей I, III, IV и изъ 4 стержней, изъ которыхъ  $ah$  и  $df$  обозначимъ цифрами II и V. Искомая линія вліянія образуется изъ прямыхъ I', II', III', IV', соотвѣтствующихъ частямъ цѣпи I, II, III, IV; нулевые точки этихъ прямыхъ лежатъ на вертикаляхъ, проходящихъ черезъ полюсы вращенія (I), (II), (III), (IV) упомянутыхъ частей цѣпи. Этими условіями опредѣляется форма линіи вліянія. Полюсъ (IV) совпадаетъ съ точкой B; полюсъ (V) лежитъ на вертикали точки  $f$ , потому что точка  $f$  перемѣщается по горизонтальному направленію; кромѣ того этотъ полюсъ долженъ лежать на прямой  $Bd$ , потому что  $d$  есть полюсъ IV.V фигуры IV относительно стержня V; три полюса (IV), IV.V и (V) должны лежать на одной прямой. Полюсъ фигуры III относительно стержня V опредѣляется безконечно удаленной точкой пересѣченія сторонъ  $cd$  и  $ef$  шарнирнаго четырехугольника  $cdef$ , а полюсъ (III) лежитъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ



(IV)  $c$  и (V)—III.  $V^*$ ). Въ точкѣ пересѣченія прямыхъ  $ah$  и  $ib$  получимъ полюсъ I.III, а полюсъ (I) получится посредствомъ условій, что (I) должно лежать на вертикали точки  $A$  и на прямой (I)—I. III; наконецъ, полюсъ (II) получится какъ точка пересѣченія прямыхъ (I)  $a$  и (III)  $h$ .



Фиг. 191.

Найдя подобнымъ образомъ линію вліянія, одна ордината которой взята произвольно, опредѣлимъ на прямыхъ I' и III точки  $a_0$ ,  $b_0$ , соотвѣтствующія конечнымъ точкамъ  $a$ ,  $b$  разсматриваемаго стержня; потомъ возьмемъ на нулевой линіи полюсъ перемѣщений  $O$  и проведемъ  $Oa' \perp (I)a$  и  $Ob' \perp (III)b$  до горизонтальныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ  $a_0$  и  $b_0$ . Тогда отрѣзки  $Oa'$  и  $Ob'$  дадутъ перемѣщенія точекъ  $a'$  и  $b'$ , соотвѣтствующія построенной линіи вліянія, а проекція  $a'b'$  на прямую, параллельную  $ab$ , дастъ измѣненіе длины  $\Delta s$  стержня  $ab$ ; такимъ образомъ при положительномъ  $\Delta s$  получимъ:

$$D = \frac{1}{\Delta s} \sum P\eta.$$

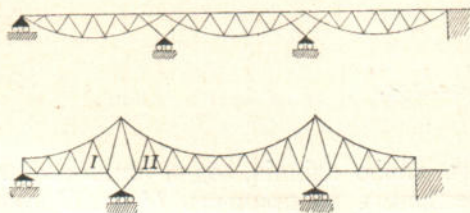
Другой способъ изображенія  $D$ -площади основывается на томъ обстоятельстве, что напряженіе  $D$  отъ дѣйствія грузовъ, ле-

\*) Замѣтимъ, что  $c$ ,  $a$ ,  $h$  будутъ соотвѣтственно полюсами части III относительно IV, стержня II относительно I и стержня II относительно III, а поэтому будемъ имѣть дѣло съ примѣненіемъ такой теоремы: если двѣ фигуры  $A$  и  $B$  вращаются относительно неподвижной фигуры  $C$  вокругъ полюсовъ ( $AC$ ) и соотвѣтственно ( $BC$ ) и если ( $AB$ ) будетъ полюсомъ для фигуры  $A$  относительно  $B$ , то три полюса ( $AC$ ) ( $BC$ ) ( $AB$ ) будутъ лежать на одной прямой. На фиг. 191 мы постарались по возможности избѣгнуть двойныхъ цифръ.

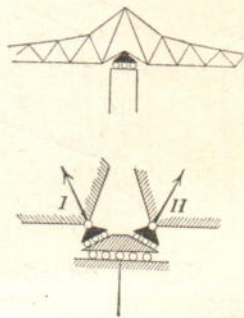


жащихъ правѣ узла  $h$ , будетъ пропорціонально сопротивленію опоры  $A$ ; поэтому  $D$ -площадь можно опредѣлить также, отложивъ ординату  $AA'$  прямой  $III'$ , равную напряженію стержня  $ab$ , вызываемому въ немъ реакціей опоры  $A=1$ . Тогда имѣетъ мѣсто уравненіе  $D=\Sigma P\eta$ , а нанесенная для провѣрки проекція  $\Delta s$  отрезка  $a'b'$  на направленіе  $D$  должна получиться равной 1. Затѣмъ отрезокъ  $a_0a_0'$  (по № 152, I томъ, выпускъ IV) долженъ равняться напряженію  $[D]$ , которое получается при разложеніи воображаемаго груза  $P=1$ , приложеннаго къ узлу  $a$ , по направленіямъ стержней  $ab$  и  $ah$ . Кромѣ того надо замѣтить, что часть  $D$ -площади дѣлѣе нулевой точки  $N$  одинакова съ  $D$ -площадью простой балки, пролетъ которой  $AN$ .

Весьма поучительныя задачи для упражненія получаются при примѣненіи только что показаннаго способа къ подобнымъ же многопролетнымъ балкамъ. Фигуры 192—194 показываютъ различныя фермы, которыя различаются между собой только формой поясовъ и положеніемъ наклонныхъ стержней, сходящихся въ средней опорѣ; эти стержни можно замѣнить также одинаково наклонными подвижными опорами, фиг. 195. Надо замѣтить, что положеніе неподвижнаго опорнаго шарнира при вертикальной нагрузкѣ не играетъ никакой роли, поэтому въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ нужно дѣлать такія предположенія, которыя облегчали бы, по возможности, опредѣленіе полюсовъ. Такъ напр., при

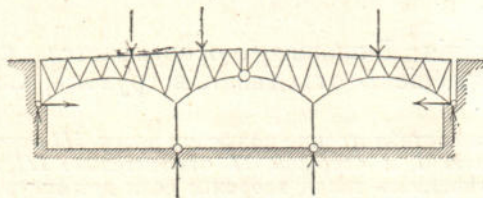


Фиг. 192 и 193.



Фиг. 194 и 195.

нимая шарниръ  $C$ , фиг. 191, за неподвижный, а шарниръ  $B$  за подвижной по горизонтальному направленію, найдемъ, что полюсъ фигуры  $IV$ , который мы теперь обозначимъ черезъ  $(IV)'$ , получился бы, какъ точка пересѣченія прямой  $fd$  съ вертикалью точки  $B$ , а полюсъ  $(III)'$ , какъ точка пересѣченія прямой  $(IV)'e$  съ прямой  $fe$ ; кромѣ того эта точка  $(III)'$  лежала бы на вертикали точки  $(III)$ , т. е. доставила бы ту же самую нулевую точку  $N$ . Тоже самое относится и до полюса  $(II)'$ ; провѣрить это мы предоставляемъ читателю. Такимъ образомъ перестановка опоръ даетъ возможность нѣсколько разъ провѣрить правильность чертежа. Но даже при дѣйствіи наклонныхъ грузовъ можно достиг-



Фиг. 196.

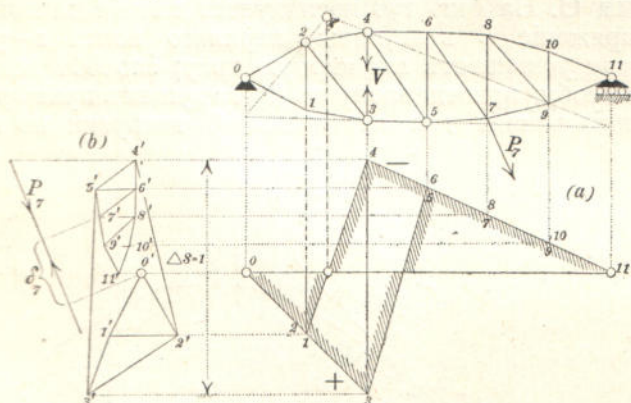
нуть упрощеній, если сначала построить линіи вліянія для вертикальной нагрузки, причемъ можемъ воспользоваться съ выгодой перестановкой опоръ, а затѣмъ получить фигуры Вилліо изъ линій вліянія, отложивъ лучи  $Oa'$  и  $Ob'$  по способу, изображенному на фиг. 191<sup>a</sup> (теперь, конечно, надо принять во вниманіе дѣйствительныя условія закрѣпленія опоръ).

Авторъ описалъ уже въ I томѣ (№ 150, примѣръ 2, выпускъ III), а также въ журналѣ: «Schweizerische



Bauzeitung», (1887, II, стр. 130) приведенный здѣсь новый родъ статически опредѣлимыхъ балокъ; въ послѣднемъ источникѣ помѣщено подобное же расположение для многопролетныхъ арочныхъ фермъ, фиг. 196. Почти два года спустя Offergmann (въ Берлинѣ) взялъ патентъ въ Германіи на расположение, показанное на фиг. 195, хотя качающіяся и скользящія опоры уже давно употребляются въ мостовомъ дѣлѣ.

**Задача 5.** Требуется построить, по одному изъ способовъ, указанныхъ въ I томѣ, линію вліянія для напряженія  $V$  въ стержнѣ 3—4 простой балки, фиг. 197, при вертикальной нагрузкѣ; эта линія вліянія состоитъ изъ трехъ прямыхъ 0—2, 2—4, 4—11 или изъ трехъ прямыхъ 0—3, 3—5, 5—11, смотря по тому, поверну ли фзда или понизу. Требуется найти вліяніе наклонныхъ грузовъ, дѣйствующихъ какъ на верхній поясъ, такъ и на нижній.



Фиг. 197.

Построимъ, исходя отъ полюса  $o'$ , произвольно взятаго на горизонтальной нулевой линіи 0—11, ломанная линіи  $o'—2'—4'—6'—8'—10'—11'$  и  $o'—1'—3'—5'—7'—9'—11'$ , которыя соотвѣтствуютъ верхнему и нижнему поясу, причемъ  $o'—2' \perp$  стержню 0—2,  $2'—4' \perp 2—4 \dots$ ,  $o'—1' \perp 0—1$ ,  $1'—3' \perp 1—3 \dots$  и точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $\dots$  лежатъ на горизонтальныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ соотвѣтствующія точки 1, 2, 3,  $\dots$  линіи вліянія. Тогда полюсные лучи, проведенные изъ полюса  $o'$  къ точкамъ 1, 2,  $\dots$  будутъ (по № 51 и 52) пропорціональны перемѣщеніямъ узловъ 1, 2,  $\dots$  кинематической цѣпи, въ которую переходитъ рѣшетка при удаленіи стержня 3—4. Если  $\delta_7$  будетъ проекціей (въ данномъ случаѣ отрицательной) отрезка  $o'7'$  на направленіе  $P_7$ , то вліяніе  $P_7$  выразится формулой:

$$V = -P_7 \delta_7.$$

Сравни также изслѣдованія въ № 76\*).

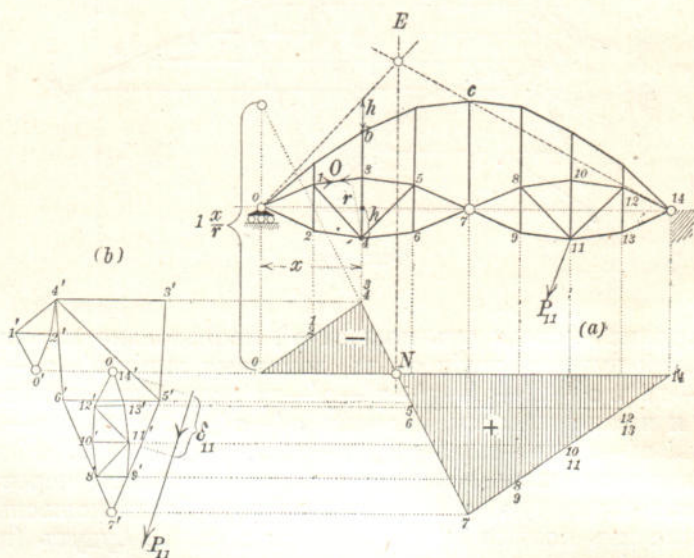
Фиг. 197 b можно получить также изъ діаграммы перемѣщеній Виллю для кинематической цѣпи, состоящей изъ двухъ жесткихъ

\* Для проекціи отрезка  $3'—4'$  на направленіе стержня 3—4 должно получиться значеніе  $\Delta s = 1$ . Что взаимное разстояніе точекъ 3 и 4 на линіи вліянія должно равняться 1, получается изъ изслѣдованій, произведенныхъ на стр. 12, выпуска V (томъ I).



фигуръ и двухъ стержней; наконецъ, фигуру 197 б можно получить помощью простаго статическаго изслѣдованія. Такъ напр., полюсный лучъ  $o'3'$  представляетъ то напряженіе  $V$  въ стержнѣ 3—4, когда на рѣшетку будетъ дѣйствовать въ узлѣ 3 только одинъ грузъ, направленіе котораго перпендикулярно къ прямой, соединяющей узлы  $o$  и 3. Посредствомъ этого напряженія, которое находится тѣмъ или другимъ способомъ, вполне опредѣляется фигура  $o'1'3'2'$ . Потомъ проводимъ  $2'4' \perp 2-4$  до горизонтальной прямой, отстоящей отъ  $3'$  по вертикальному направленію на разстояніи единицы; затѣмъ проводимъ  $4'5' \perp 4-5$  и  $3'5' \perp 3-5$  и наконецъ, строимъ фигуру  $4'5'7'9'11'10'8'6'4'$ . Точка  $11'$  должна (при тщательномъ построеніи) лежать на горизонтальной прямой, проходящей черезъ  $o'$  \*).

**Задача 6.** На фиг. 198 изслѣдуется вліяніе наклонныхъ грузовъ на напряженіе  $O$  въ стержнѣ верхняго пояса 1—3 жесткой балки, которая усиливаетъ шарнирную арку; способъ изслѣдованія подобенъ способу, приведенному въ предыдущемъ примѣрѣ; сначала строится линія вліянія для вертикальной нагрузки по правиламъ



Фиг. 198.

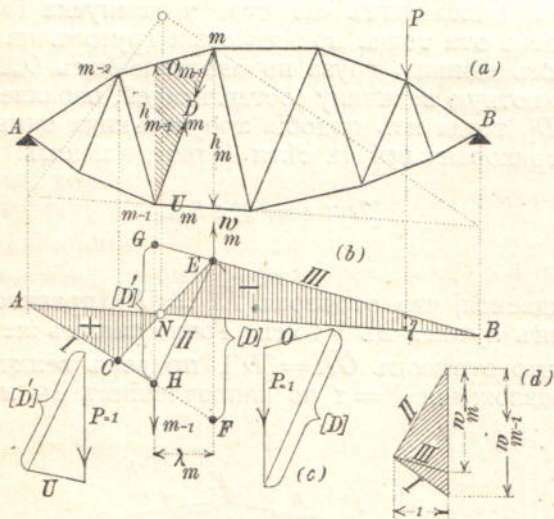
§ 52 (томъ I, выпускъ V). Узелъ 4, лежащій противъ разсматриваемаго стержня, находится на разстояніи  $h$  ниже линіи, соединяющей опорные шарниры, поэтому отръзокъ  $h$  откладывается *кверху* отъ соотвѣтствующаго узла арки  $b$ ; потомъ черезъ  $o$  и черезъ конечную точку отръзка  $h$  проводимъ прямую, которая встрѣтитъ линію 14— $c$  въ точкѣ  $E$ . На вертикали подъ  $E$  лежитъ нулевая точка линіи вліянія, состоящей изъ трехъ прямыхъ; средняя прямая

\*) Для полученія фиг. 197 б изъ фиг. 197 а достаточно опредѣленія одного четырёхугольника  $2'3'4'5'$ .

отсѣкается на вертикали точки  $o$  отрезокъ  $\Gamma \frac{x}{r}$ , гдѣ  $r$  есть величина перпендикуляра, опущеннаго изъ узла 4 на стержень  $O$ . Эта линия вліянія годится для грузовъ, дѣйствующихъ и поверху, и понизу; ею можно воспользоваться для построения фиг. 198 в. Точка  $O$  есть полюсъ, взятый на нулевой линіи. Точка  $14'$  совпадаетъ съ  $O$ . Если требуется принять во вниманіе грузы, приложенные къ нижнимъ узламъ, то достаточно будетъ вычертить ломанную  $14' 13' 11' 9' 7' 6' 4' 2' o'$ , соответствующую нижнему поясу. Вліяніе силы  $P_{11}$  на напряженіе  $O$  выразится формулой:

$$O = + P_{11} \delta_{11}.$$

Авторъ рекомендуетъ примѣнить этотъ способъ, въ видѣ упражненій, къ балкѣ Гербера, трехшарнирной аркѣ и къ жесткимъ висячимъ мостамъ; во многихъ случаяхъ при изслѣдованіи дѣйствія наклонныхъ грузовъ слѣдуетъ примѣнять способъ, который получается изъ построения линій вліянія для вертикальной нагрузки.



Фиг. 199.

**Задача 7.** Требуется построить съ помощью веревочнаго многоугольника линію вліянія для напряженія  $D_m$  въ раскосѣ  $(m-1)-m$ , (подымающемся вправо) простой балки, фиг. 199. Грузы предполагаются вертикальными.

Припишемъ длинѣ  $d_m$  разсматриваемаго стержня измѣненіе длины  $\Delta d_m = 1$  и вычислимъ (по стр. 12) грузы:

$$w_{m-1} = \frac{\Delta d_m}{h_{m-1} \cos \varphi_m} = \frac{1}{h_{m-1} \cos \varphi} \text{ и } w_m = - \frac{\Delta d_m}{h_m \cos \varphi_m} = - \frac{1}{h_m \cos \varphi_m};$$

затѣмъ построимъ веревочный многоугольникъ  $II III$  при полюсномъ разстояніи 1 и проведемъ замыкающую  $AB$ . Если грузы при-



ложены сверху, то проведемъ еще прямую  $CE$ , соответствующую панели  $(m-2)-m$ ; заштрихованная площадь, фиг. 199 b, представить искомую площадь вліянія.

Такъ какъ треугольникъ  $EFH$  на фиг. 199 b подобенъ треугольнику, заштрихованному на фиг. 199 d, то получимъ, что

$$\text{отрѣзокъ } \overline{EF} = w_{m-1} \frac{\lambda_m}{1} = \frac{\lambda_m}{h_{m-1} \cos \varphi_m} = \frac{d_m}{h_{m-1}};$$

точно также получимъ, что

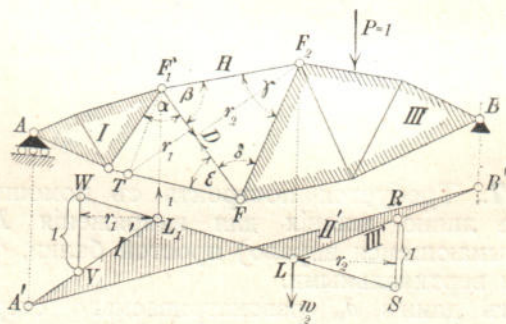
$$\text{отрѣзокъ } \overline{HG} = \frac{d_m}{h_m}.$$

Съ помощью этихъ двухъ отрѣзковъ можно опредѣлить площадь вліянія, не строя многоугольника силъ. Можно также удовольствоваться однимъ отрѣзкомъ, если опредѣлимъ нулевую точку  $N$  по правиламъ, описаннымъ на стр. 7, выпуска IV (I томъ); на фиг. 199 найдена эта точка при дѣйствіи грузовъ на верхній поясъ.

Разложимъ единицу груза по направлениямъ  $O_{m-1}$  и  $D_m$  и обозначимъ абсолютную величину составляющей, параллельной стержню  $D_m$ , черезъ  $[D]$ , тогда изъ подобія треугольника силъ съ треугольникомъ, заштрихованнымъ на сѣти фермы, найдемъ:

$$[D] : 1 = d_m : h_{m-1};$$

отсюда убѣждаемся, что отрѣзокъ  $\overline{EF} = [D]$ ; правило это было выведено другимъ путемъ въ I томѣ. Точно такимъ же способомъ доказывается, что отрѣзокъ  $\overline{GH} = [D]$ , причемъ величина  $[D']$  получается при разложеніи  $P = 1$  по направлениямъ  $D_m$  и  $U_m$ .



Фиг. 200.

Полезно построить по этому способу линію вліянія для напряженія въ вертикальной стойкѣ. Въ I томѣ было указано, что линіи вліянія для балокъ Гербера, для трехшарнирныхъ арокъ, для жесткихъ цѣпей и шарнирныхъ арокъ выводятся изъ линій вліянія для простой балки.

Можно вывести простой способъ построения линіи вліянія для напряженія  $D$  въ промежуточномъ стержнѣ  $F_1F$  (см. фиг. 200, на-

грузка предполагается по верхнему поясу), если разсматривать линію вліянія, какъ веревочный многоугольникъ для грузовъ  $w_1 = \Delta (\alpha + \beta)$  и  $w_2 = \Delta \gamma$ ; причемъ  $\Delta (\alpha + \beta)$  и  $\Delta \gamma$  означаютъ измѣненія угловъ, обусловленные измѣненіемъ  $\Delta d = 1$  длины стержня  $d = \overline{F_1 F}$ . По уравн. (1) въ № 40 (выпускъ VI) получимъ:

$$w_2 = \Delta \gamma = \frac{\Delta d}{d} (\cotg \beta + \cotg \delta) = \frac{1}{r_2}$$

$$w_1 = \Delta \alpha + \Delta \beta = -\frac{\Delta d}{d} \cotg \varepsilon - \frac{\Delta d}{d} \cotg \delta = -\frac{1}{r_1}.$$

гдѣ  $r_2$  и  $r_1$  означаютъ длину перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ  $F_2$  и соотвѣтственно  $T$  на стержень  $F_1 F$  (причемъ проведено  $F_1 T \parallel F_2 F$ ).

Разсматриваемая линія вліянія состоитъ изъ прямыхъ  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$ , соотвѣтствующихъ частямъ фермы  $I$ ,  $II$ ,  $III$ . Стороны  $II'$  \*) и  $III'$  отсѣкаютъ на вертикальной прямой, находящейся отъ  $L_2$  на разстояніи  $r_2$ , отрѣзокъ  $\overline{RS} = w_2 \frac{r_2}{H}$ , причемъ  $H$  означаетъ полюсное разстояніе веревочнаго многоугольника. Такъ какъ  $H = 1$ , то получимъ  $\overline{RS} = 1$ ; точно также получимъ, что стороны  $I'$  и  $II'$  должны отсѣчь на вертикальной прямой, отстоящей отъ  $L_1$  на разстояніи  $r_1$ , отрѣзокъ равный 1. Послѣ этого легко построить и линію вліянія. Сторону  $II'$  направляемъ произвольно, а стороны  $I'$  и  $III'$  опредѣляемъ при помощи обѣихъ упомянутыхъ выше вертикальныхъ прямыхъ.

Мы рекомендуемъ читателю изслѣдовать также дѣйствіе нагрузки, приложенной къ нижнему поясу.



\*) На фиг. 200 обозначеніе  $II'$  должно относиться къ прямой  $L_1 L_2$ .



# Литература къ отдѣлу I.

1. Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover. 1875. Стр. 17. Здѣсь впервые разсматривается линія прогибовъ рѣшетки какъ веревочный многоугольникъ.
2. Williot, *Notations pratiques sur la statique graphique*, Publications scientifiques industrielles, 1877; содержитъ основанія способа построенія перемѣщений, названнаго нами способомъ Вилліо.
3. Herzmasky, *Durchbiegung eiserner Fachwerke*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1878, стр. 185—189.
4. Steiner, F., *Studien über Fachwerke*, Techn. Blätter 1880. Стр. 134. Между прочимъ находится построеніе линіи вертикальныхъ прогибовъ горизонтальнаго пояса, какъ веревочнаго многоугольника для измѣненій угловъ  $\Delta\theta$ .
5. Skibinski, *Das Deformationspolygon und dessen Anwendung zur graphischen Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1883, стр. 23.
6. Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Civilingenieur, 1885.
7. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1885. Вычисленіе грузовъ  $w$  по способу, описанному въ § 3 этого тома, и примѣненіе линій прогибовъ къ расчету статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ.
8. Müller Breslau, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, 1886. Построеніе и примѣненіе линій прогибовъ, о которыхъ говорится въ §§ 5—11 этого тома.
9. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie der ebenen Träger*, Schweiz. Bauz. 1887 Band IX, стр. 121; Band. X, стр. 129 и 1888, Band. XI, стр. 45. Въ этихъ статьяхъ по изслѣдованію статически опредѣлимыхъ фермъ (см. § 6 этого тома) примѣнено въ первый разъ построеніе перемѣщений (и скоростей) кинематической цѣпи при помощи способа Вилліо.
10. Mohr, *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne*, Civilingenieur, 1887. Указано примѣненіе способа Вилліо къ построенію скоростей, а также и ускореній кинематической цѣпи.
11. Müller-Breslau, *Berechnung statisch bestimmter ebenen Träger mit Hilfe der geometrischen Bewegungslehre*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 1888, стр. 91. Здѣсь находится расчетъ рѣшетки посредствомъ диаграммъ перемѣщений по Вилліо.
12. Ovazza, *Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati*, Atti della Academia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.
13. Ovazza, *Sul calcolo delle frecce elastiche delle travi reticolari*, Atti della Academia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.

14. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1888, стр. 605. Примѣненіе способа шарнирнаго многоугольника; см. § 2 этого тома.
15. Land, *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1888, стр. 11 и 162; эта теорія основывается главнымъ образомъ на примѣненіи диаграммы перемѣщеній кинематической цѣпи по Вилліо. Въ прибавленіи разсматриваются линіи прогибовъ упругаго шарнирнаго многоугольника; здѣсь достойно вниманія замѣненіе упругаго сочлененія посредствомъ цѣпи, звенья которой состоятъ изъ жесткихъ частей. Это превращеніе выведено на тѣхъ же основаніяхъ, какъ и способъ вспомогательнаго шарнирнаго многоугольника, предложенный нами въ № 52. (стр. 37) этого выпуска; у насъ форма этого шарнирнаго многоугольника разъ принятая остается безъ измѣненія для всѣхъ случаевъ нагрузки (что напр., очень важно при примѣненіяхъ въ № 75), у Land'a же цѣпь изъ звеньевъ мѣняетъ свою форму съ перемѣной нагрузки.
16. Müller-Breslau, *Beiträge zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Centralblatt der Bauverwaltung, 1889, содержитъ между прочимъ преобразованія условій упругости, сдѣланныя на стр. 58—68 этого выпуска.

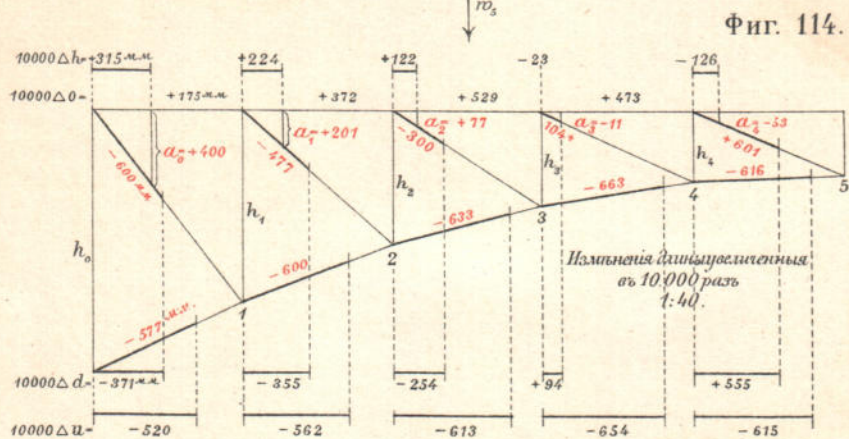
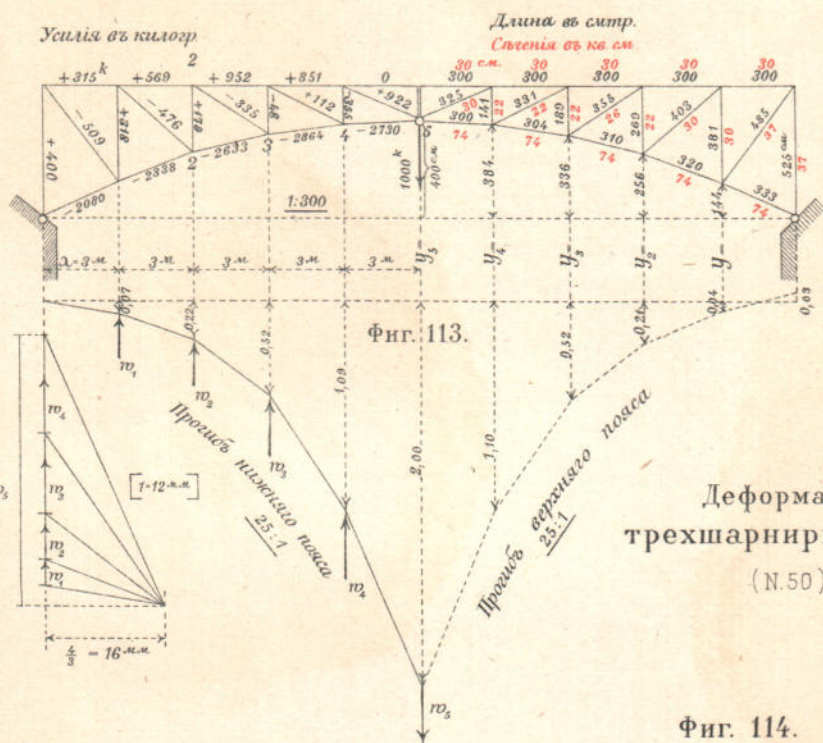


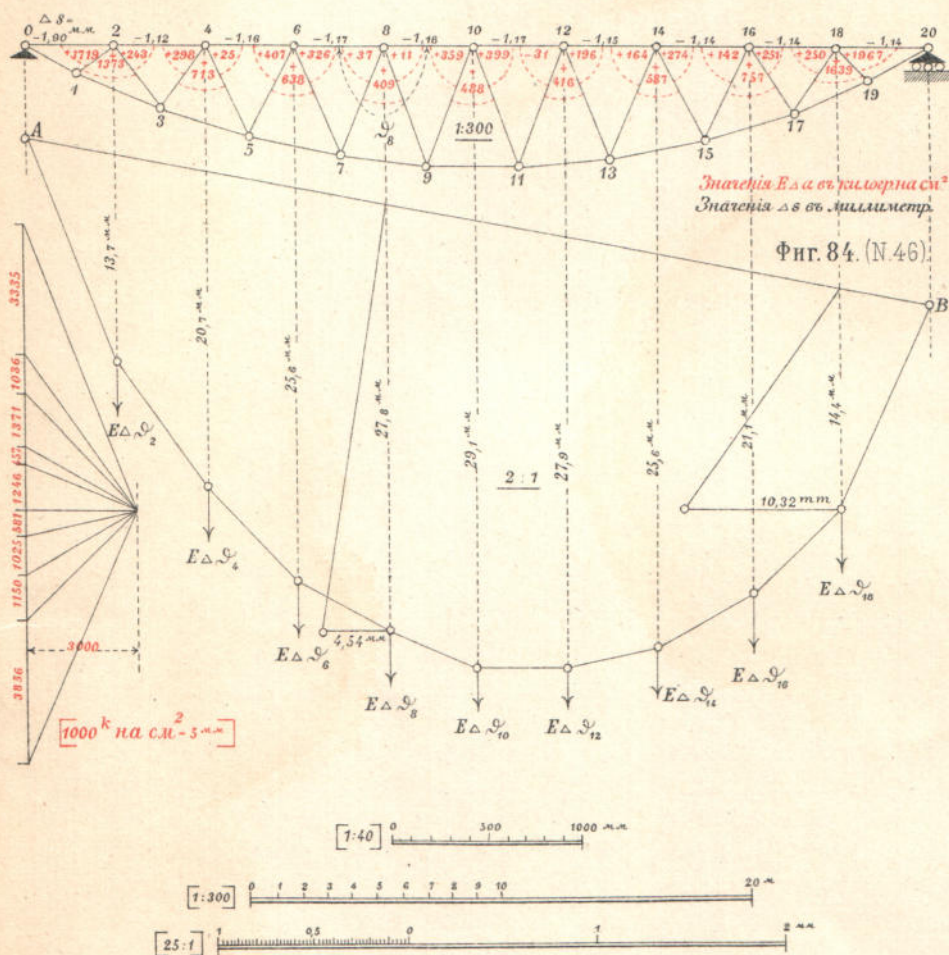












Фиг. 84.113.114.

Издание Инженера П.Казина.









## ЦѢНА ПОЛНАГО ИЗДАНІЯ

2 тома—10 выпусковъ, объемъ около 65 печатныхъ листовъ съ 1000 чертежами въ текстъ и 15 литографированными таблицами)

по подпискѣ въ книжныхъ магазинахъ—**12** рублей.

Для гг. студентовъ техническихъ заведеній по подпискѣ у издателя—(С.-Петербургъ, Фонтанка 24, кв. 9)—**8** рублей.

При полученіи перваго выпуска вносится **3** руб., при послѣдующихъ по **1** руб. **50** коп. до полной уплаты (Для студентовъ **3** руб. при полученіи перваго выпуска и по **1** руб. при слѣдующихъ).

За пересылку по вѣсу и разстоянію налагается платежъ.

Отдѣльные выпуски продаваться не будутъ.

ИЗДАНІЕ БУДЕТЬ ОКОНЧЕНО ВЪ ТЕЧЕНІИ 1899 ГОДА.

НАПЕЧАТАНЫ СЛѢДУЮЩІЕ ВЫПУСКИ: I, II, III и V (томъ I), VI и VII (томъ II).



Дозволено цензурой. С.-Петербургъ, 2 Ноября 1899 г.

Типо-Литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ, М. Морская, № 9.